

**Неустойчивые периодические орбиты,  
режимы циркуляции и отклик на  
внешние воздействия упрощенных  
атмосферных моделей**

**А. Грицун**

**Институт вычислительной  
математики им. Г.И. Марчука РАН**

**asgrit@mail.ru**

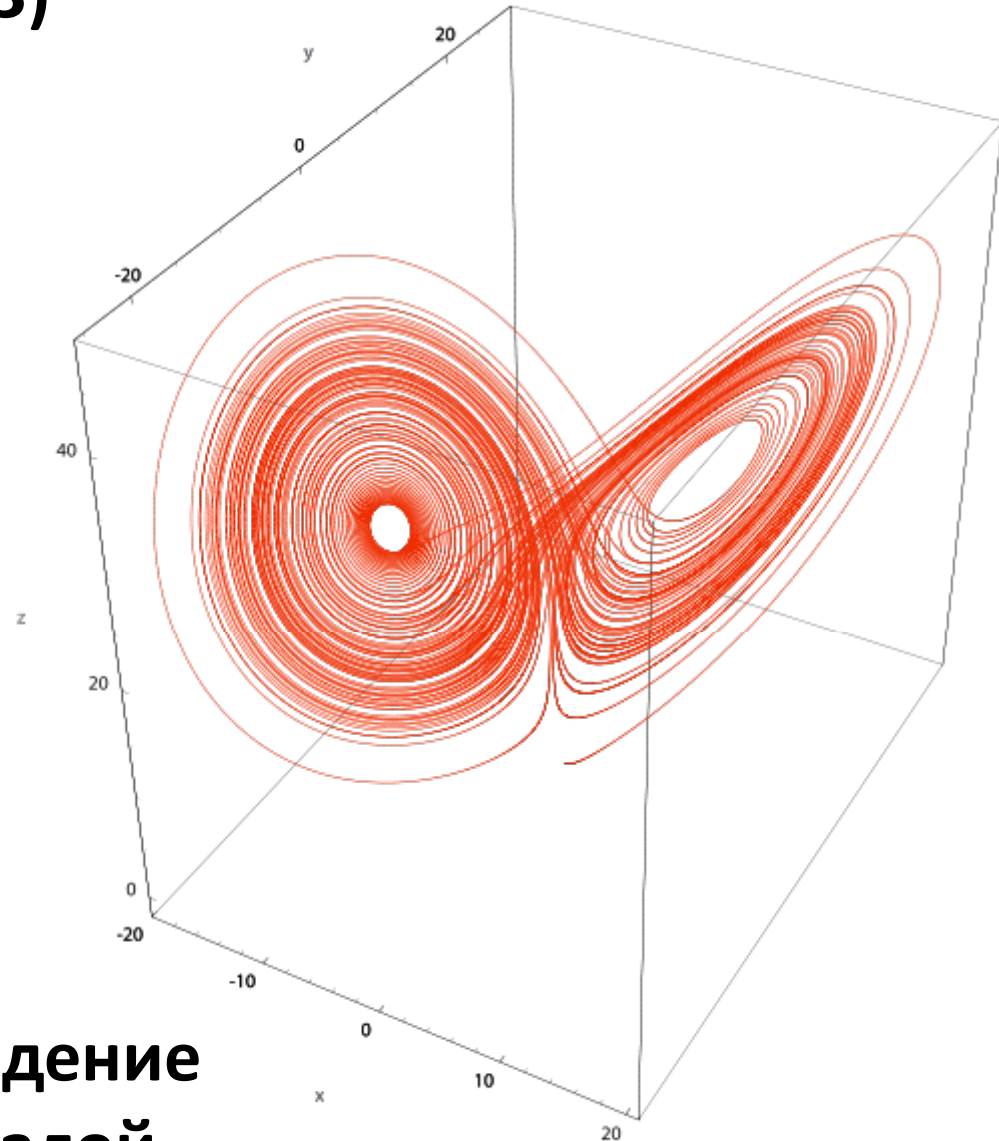
## Модель Лоренца (1963)

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$$



➤ **Качественное поведение хаотических систем малой размерности**

# Модель Лоренца (1996)

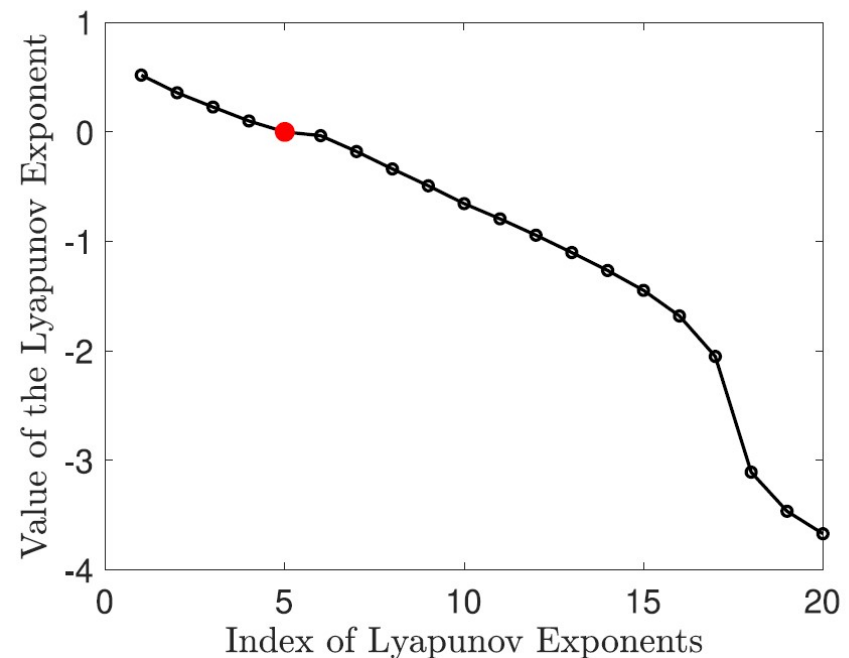
Модель «одномерной динамики вдоль выделенной широты

$$\dot{X}_j = (X_{j+1} - X_{j-2})X_{j-1} - \alpha X_j + F, \quad j = 1, \dots, J$$

$$X_{-1} = X_{J-1}, \quad X_0 = X_J, \quad X_{J+1} = X_1.$$

$$J = 20, \quad F = 5, \quad \text{and} \quad \alpha = 1$$

➤ **Качественное поведение хаотических систем, анализ поведения при росте размерности**



# Баротропная модель атмосферы

2D Navier-Stokes system + forcing + rotation + boundary & turbulent friction + orography

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l + H) = -\alpha \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + f_{ext}.$$

$J, \Delta$     **Jacobian and Laplacian**

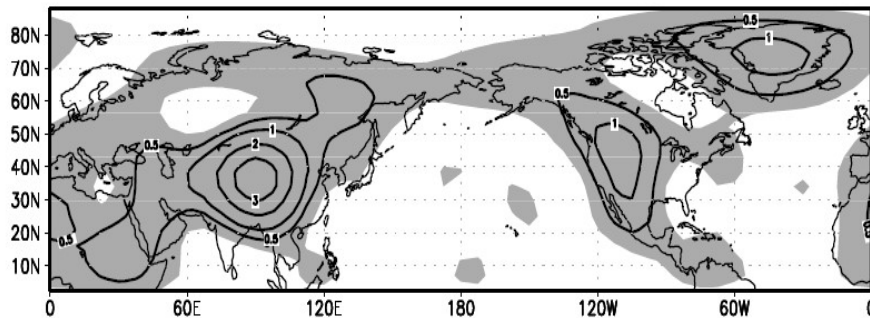
$l$         **Coriolis parameter**

$\alpha, \mu$     **Boundary & turbulent friction**     $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$      $\mu = 6 \cdot 10^{-5}$

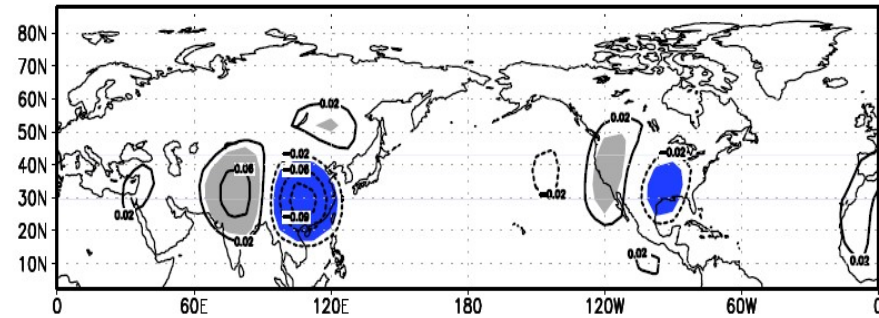
$f_{ext}$       **Climate (constant in time) forcing**

$H$         **(Real) Orography**

Galerkin method, T12/T21 resolution (spherical harmonics  $m < 13(22)$ ), Phase space dim=78 (231)

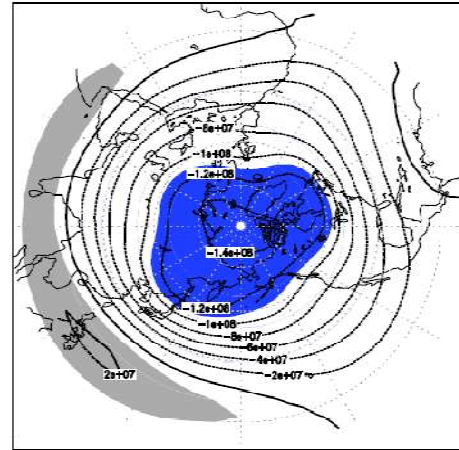
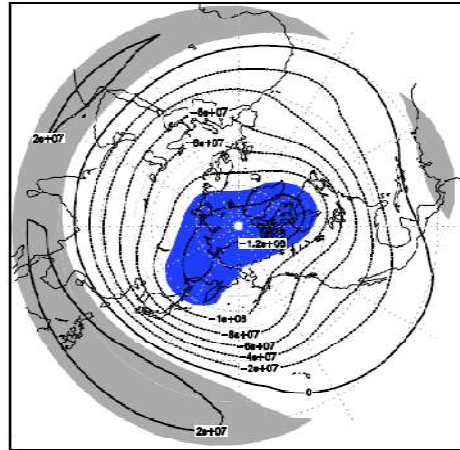
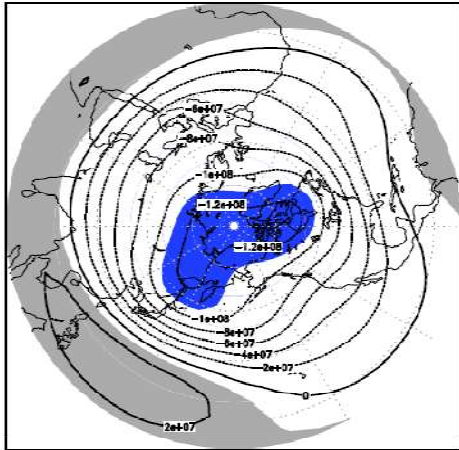


Model orography



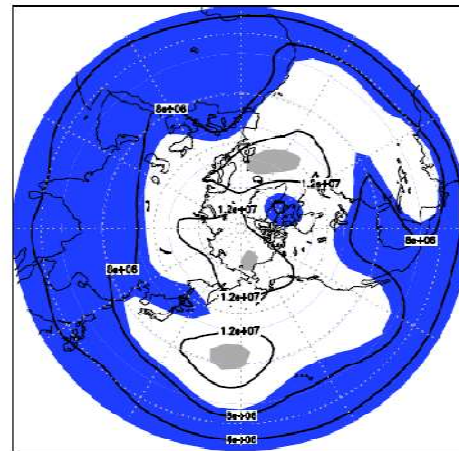
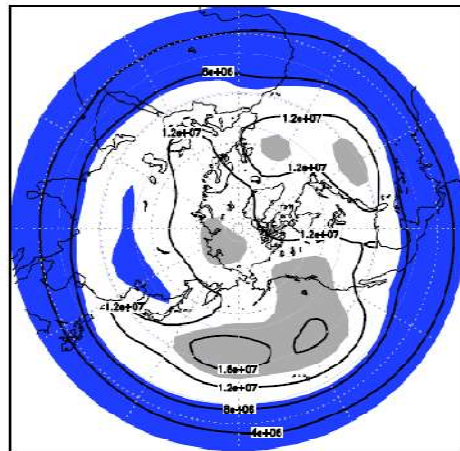
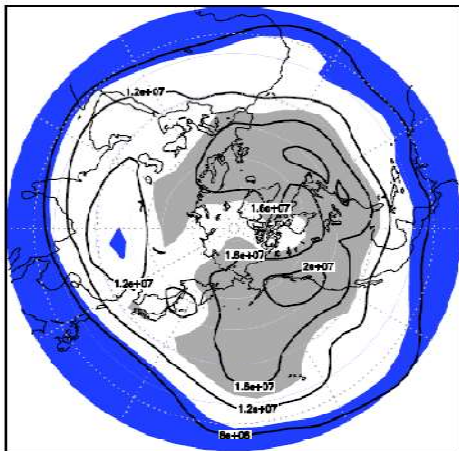
$$f_{ext} = J(\psi_r, \Delta \psi_r + l + H) + \alpha \Delta \psi_r - \mu \Delta^2 \psi_r.$$

# Barotropic models climate vs observations



**Average state**

$$\bar{\psi} = \sum_k \psi(t_k) / K$$



**Variance**

$$\sigma = \left( \frac{1}{K} \sum_k (\psi(t_k) - \bar{\psi})^2 \right)^{1/2}$$

**300mb NCEP data**

**T21**

**T12**

# Marshall and Molteni model

3 level QG model +forcing + boundary&turbulent friction +orography.

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + J(\psi_1, q_1) = -D_1(\psi_1, \psi_2) + S_1$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + J(\psi_2, q_2) = -D_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + S_2$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} + J(\psi_3, q_3) = -D_3(\psi_2, \psi_3) + S_3$$

PV at 3 levels (200, 500, 800hPa) :

$$q_1 = \Delta \psi_1 - (\psi_1 - \psi_2)/(R_1)^2 + f$$

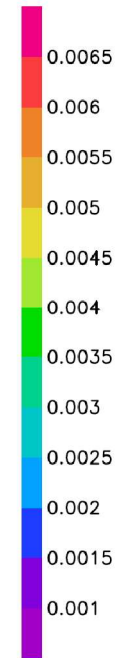
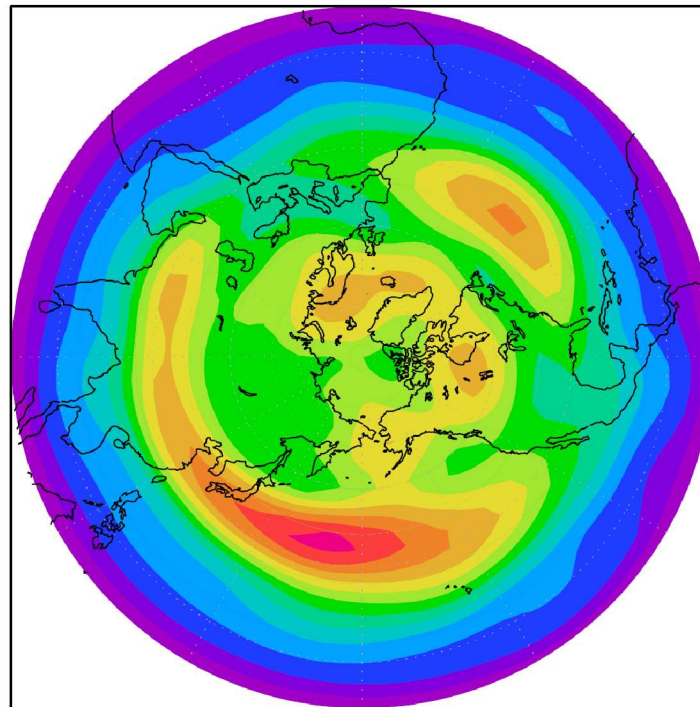
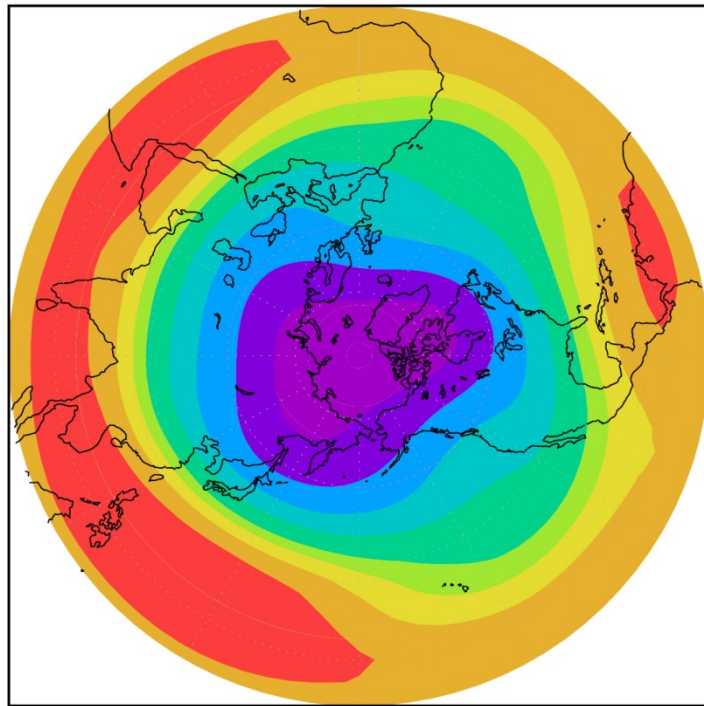
$$q_2 = \Delta \psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)/(R_1)^2 - (\psi_2 - \psi_3)/(R_2)^2 + f$$

$$q_3 = \Delta \psi_3 + (\psi_2 - \psi_3)/(R_2)^2 + f(1 + h/H_0)$$

Coriolis parameter	$f$
Rossbi deformation radii	$R_1 = 700 \text{ km}, R_2 = 450 \text{ km}$
Linear dampings	$D_1, D_2, D_3$
Climate (constant in time) forcing	$S_1, S_2, S_3$
(Real) Orography	$h \quad H_0 = 9 \text{ km}$

# Marshall & Molteni model

Galerkin method, T18 resolution (anti symmetric spherical harmonics  $m < 19$ ),  
phase space  $\text{dim} = 3 \times 171$



**Average state (streamfunction at 200hPa) and Variability (streamfunction at 200hPa)**

## Типичная модель “атмосферы”:

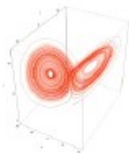
$$\frac{du}{dt} = F(u) + f.$$

$$u(0) = u_0, \quad F : R^N \rightarrow R^N \quad f = \text{const}(t).$$

**хаотичность** = (экспоненциальная) чувствительность траектории к изменению внешних воздействия

Близкие траектории расходятся с экспоненциальной скоростью, характеризуемой показателями Ляпунова. Система забывает конфигурацию ансамбля начальных условий

Система Лоренца

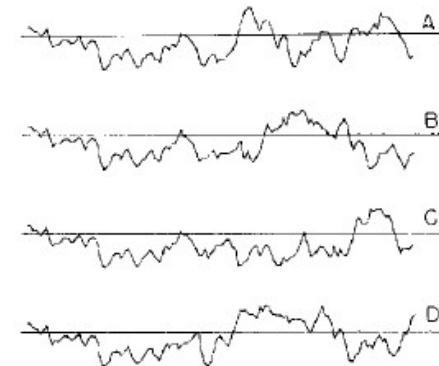


$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

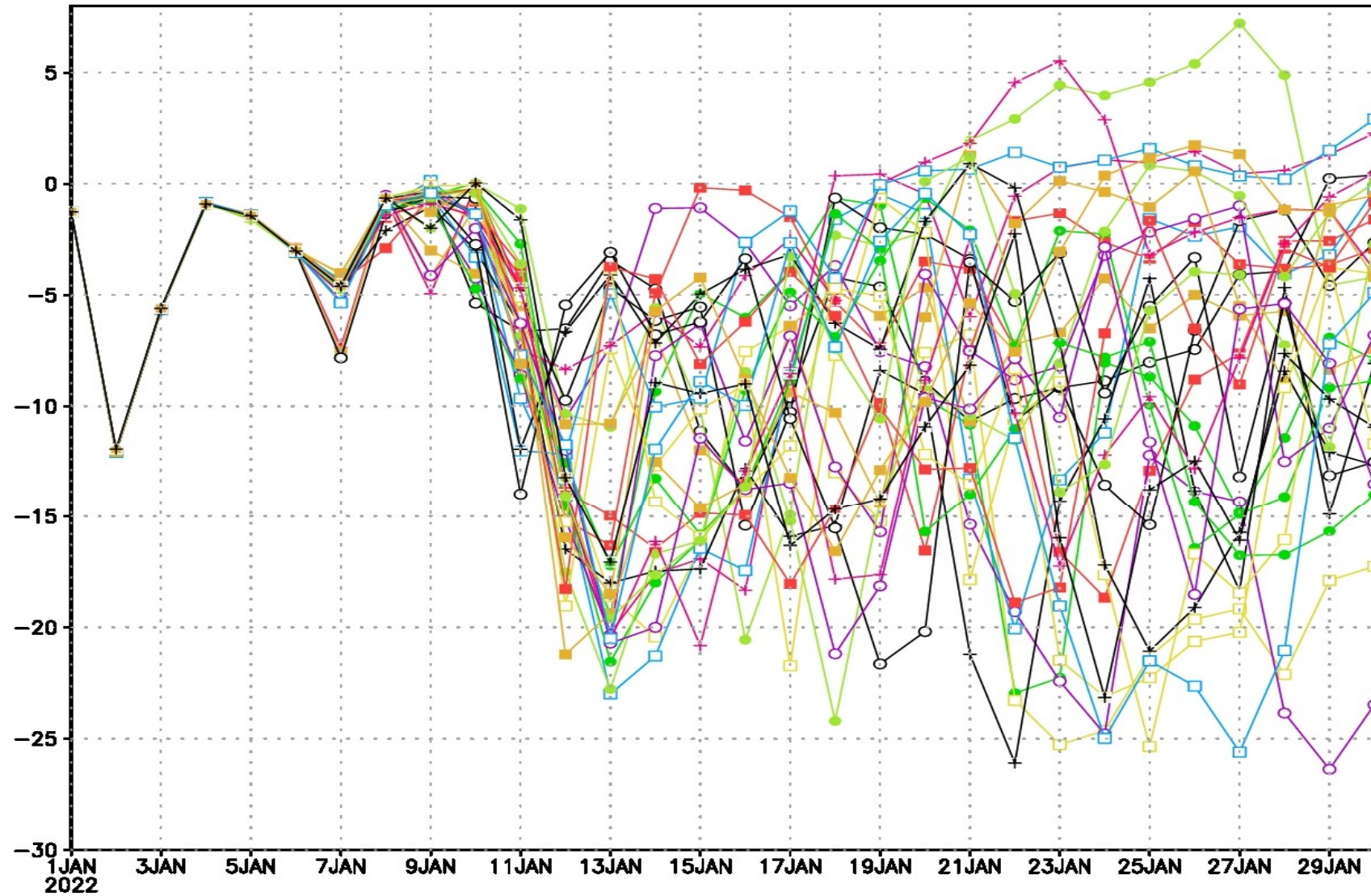
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$$

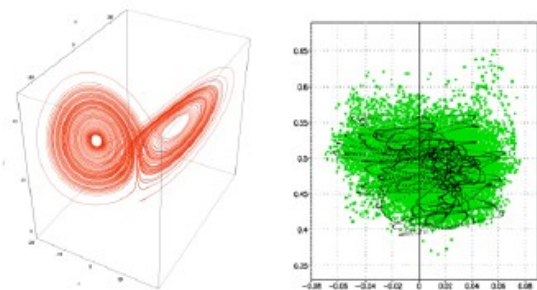


## Weather forecast of the 2m temperature

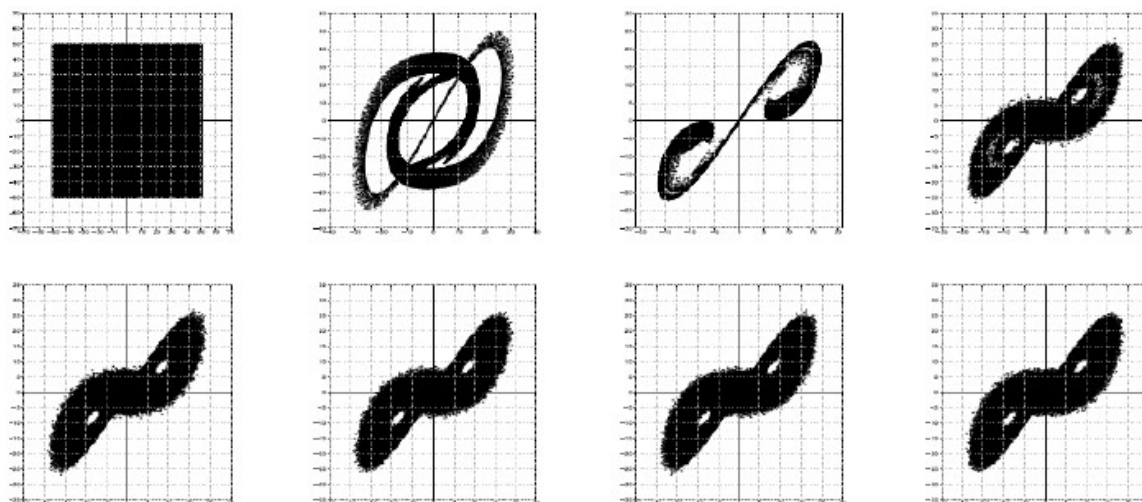


**Loss of the prediction skill after 7 days**

**Диссипативность** = сжатие фазового объема



**Диссипативность + хаотичность** приводят к существованию нетривиального инвариантного предельного множества (аттрактора) фрактальной структуры, на котором можно определить понятие меры



Эволюция ансамбля из 1 миллиона траекторий в модели Лоренца

## **Аттрактор: инвариантное, притягивающее и компактное множество в фазовом пространстве модели**

Все простые атмосферные модели (уравнение баротропного вихря, двухслойная КГ модель атмосферы, сист. двумерных уравнений Навье-Стокса, система примитивных уравнений) имеют конечномерные аттракторы. Получены некоторые обобщения и на периодический случай (Cherpyzhov, Vishik, 1993,4).

**Теорема Боголюбова: на аттракторе существует как минимум одна инвариантная мера.**

**Теорема Биркгофа: Среднее вдоль типичной траектории существует и совпадает со средним по мере для почти всех траекторий (при условии эргодичности).**

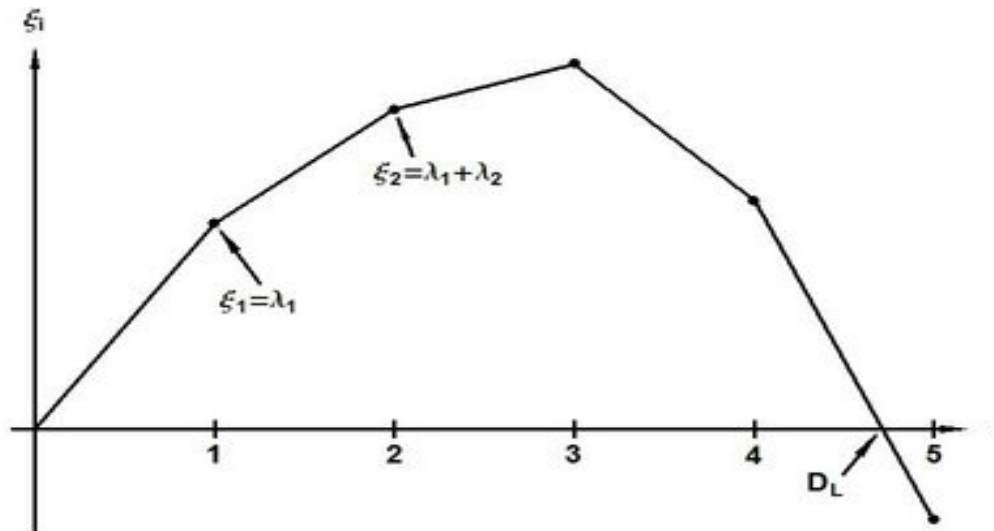
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T W(u(t)) dt = \langle W \rangle = \int_A W d\mu$$

**Теорема Пуанкаре о возвращаемости: ненулевое пересечение множества и его образа через некоторое (большое) время.**

**Размерность (сложность) аттрактора может быть оценена по Ляпуновским показателям системы с помощью формулы Каплана - Йорка**

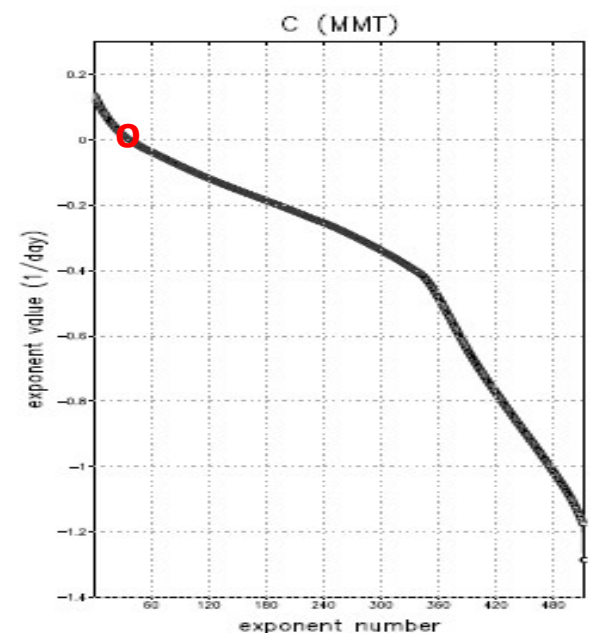
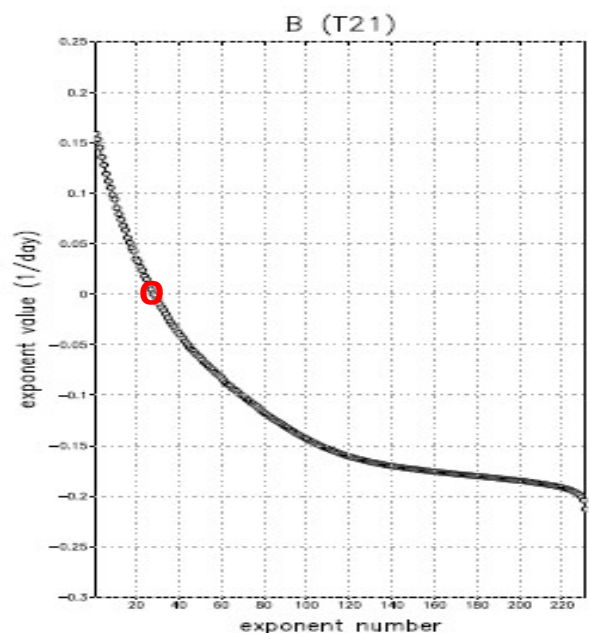
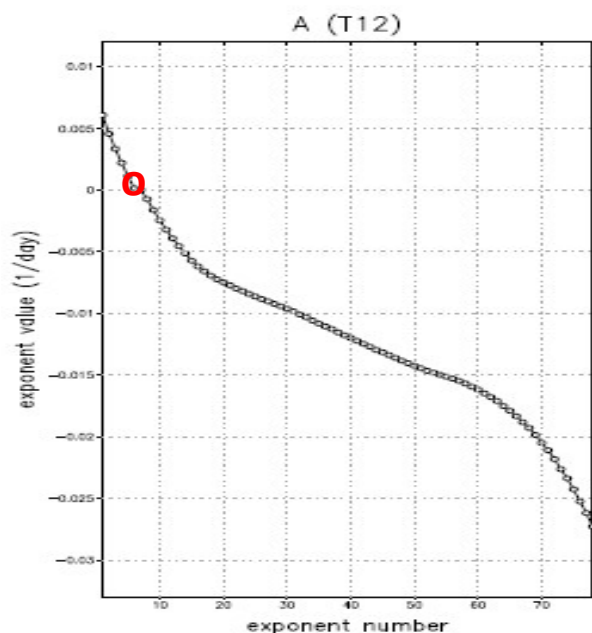
$$\lambda_j(u(0)) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|h_j(t)|}{|h_j(0)|} > 0$$

$$\dim_A = k + \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{|\lambda_{k+1}|} \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j > 0, \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j < 0.$$



# Все рассматриваемые модели при «разумных» параметрах хаотичны

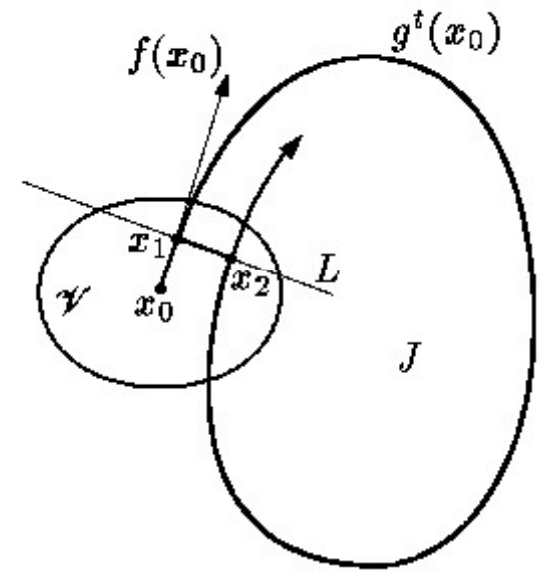
	T12	T21	MM
Размерность фазового пространства	78	232	510
Размерность К.-У.	13.5	65	89
Число положительных показателей	6	27	37
Макс. $e$ – рост ошибки (дни)	26	6	7
$e$ - рост объема (энтропии К.-С.)	5.8	0.50	0.47



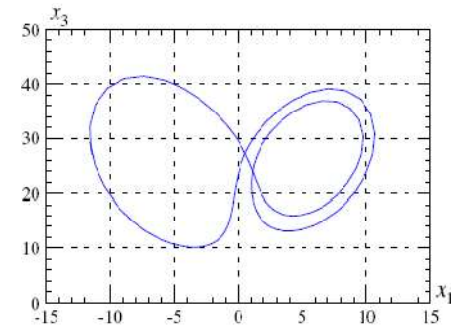
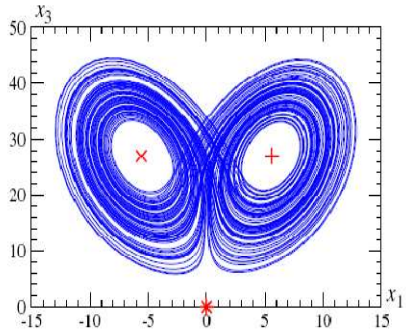
A/B/C: Спектр показателей Ляпунова для моделей T12/T21/MM

# Ок, что дальше?

- Моды изменчивости
- Предсказуемость
- Режимы циркуляции
- **Инструмент исследования?**
- ✓ **Орбиты (может быть много)**
- **Стационарные точки (мало)**

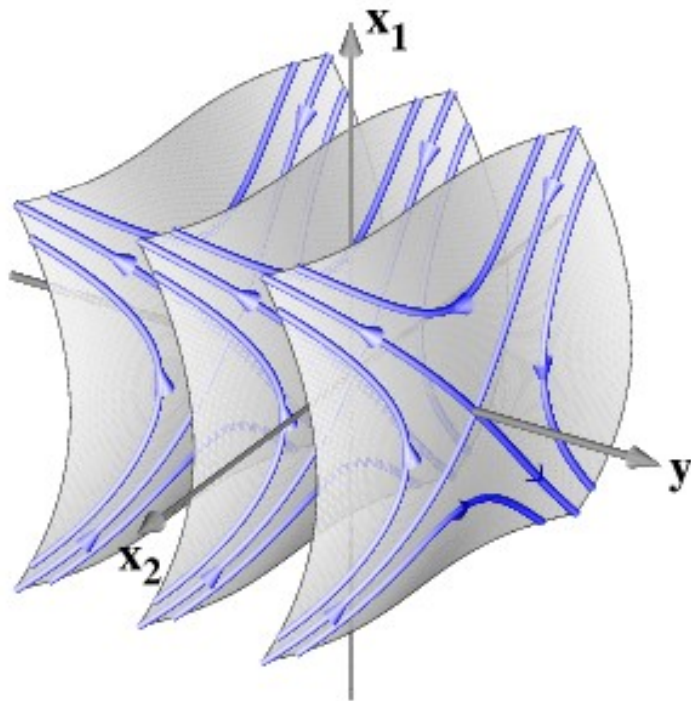


Псевдоорбиты  
Теоремы Пуанкаре



## Определение.

Если все траектории системы являются равномерно гиперболическими, все константы и размерности можно выбрать одинаковыми, то система называется системой Аносова.



### Структурная устойчивость

типичная траектория возмущенной системы может быть приближена специальной траекторией исходной системы

### Аппроксимация траекторий орбитами

любая траекторий системы может быть приближена периодической орбитой с произвольной точностью

Атмосферные модели хаотические, (вероятно) имеют ненулевые Ляпуновские показатели, но (скорее всего) не являются системами Аносова.

## **Хаотическая гипотеза (Galavotti).**

**Типичную хаотическую систему с большим числом степеней свободы (и большим числом положительных показателей Ляпунова) можно считать системой Аносова, если рассматривается задача вычисления ее макроскопических характеристик (глобальных статистик - интегралов по всему аттрактору).**



- Периодические траектории всюду плотны на аттракторе и определяют статистические характеристики, их число экспоненциально растет с периодом**
- Система структурно устойчива
- Мера дифференцируема (существует оператор отклика)
- Экспоненциальное затухание корреляций

## Как искать орбиты?

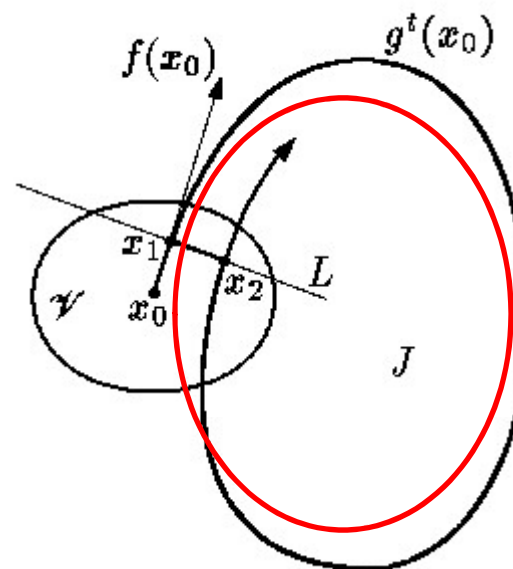
$$S(T, u_0) = u_0$$

### 1. Начальное условие.

$$S(t, u_0), t \in [0, \Theta]$$

$$\min_{t_1, t_2} |S(t_1, u_0) - S(t_2, u_0)|$$

$$u^{(0)} = S(t_1, u_0), T^{(0)} = t_2 - t_1$$



### 2. Фазовое условие.

$$S(T, u_0) = u_0 \Rightarrow u = S(t, u_0) \rightarrow S(T, u) = u,$$

**Н.у. может двигаться вдоль орбиты!**

$$S(T, u_0) = u_0; +$$

$$[u_0]_{k_0}^{(i)} = C$$

$$(u^{(i+1)} - u^{(i)}, F(u^{(i)})) = 0$$

Система из  $N$  уравнений  $S(T, u_0) = u_0$  + фазовое условие  
определяют  $N+1$  неизвестное (н.у. орбиты и период)

### 3. Метод Ньютона

$$u^{(i)}, T^{(i)}$$

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + h^{(i)}, T^{(i+1)} = T^{(i)} + \tau^{(i)}$$

$$S(T^{(i+1)}, u^{(i+1)}) = u^{(i+1)} \rightarrow$$

$$S(T^{(i)}, u^{(i)}) + \left. \frac{\partial S(T, u)}{\partial T} \right|_{(T^{(i)}, u^{(i)})} \tau^{(i)} + \left. \frac{\partial S(T, u)}{\partial u} \right|_{(T^{(i)}, u^{(i)})} h^{(i)} = u^{(i)} + h^{(i)}$$

$$S_T = \left. \frac{\partial S(T, u)}{\partial T} \right|_{(T^{(i)}, u^{(i)})} \quad S_u = \left. \frac{\partial S(T, u)}{\partial u} \right|_{(T^{(i)}, u^{(i)})} \quad \Phi^{(i)} = u^{(i)} - S(T^{(i)}, u^{(i)})$$

$$\begin{bmatrix} S_u - E & S_T \\ F^{(i)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^{(i)} \\ \tau^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [N][g] = [f]$$

решать методом Ньютона дорого! – для каждой итерации метода Ньютона нужно интегрировать полную линеаризованную систему.



**Итерационное решение системы метода Ньютона**

$[N][g] = [f] \rightarrow$  **GMRES, Крыловский базис 10-30 векторов, интегрирование линейной системы для 10-30 начальных условий.**

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \kappa h^{(i)}$$

$$T^{(i+1)} = T^{(i)} + \kappa \tau^{(i)}$$

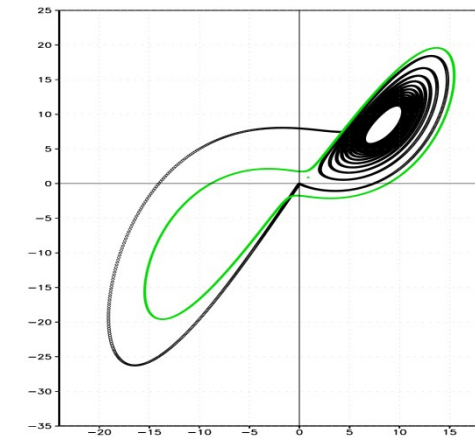
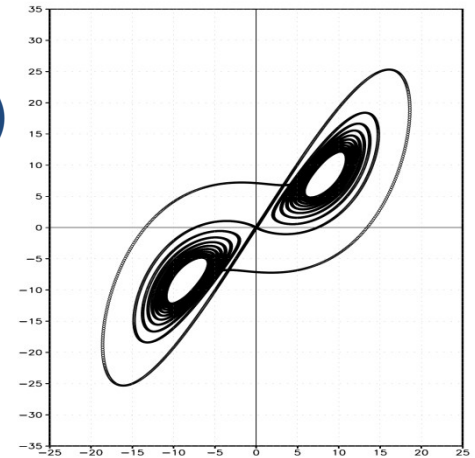
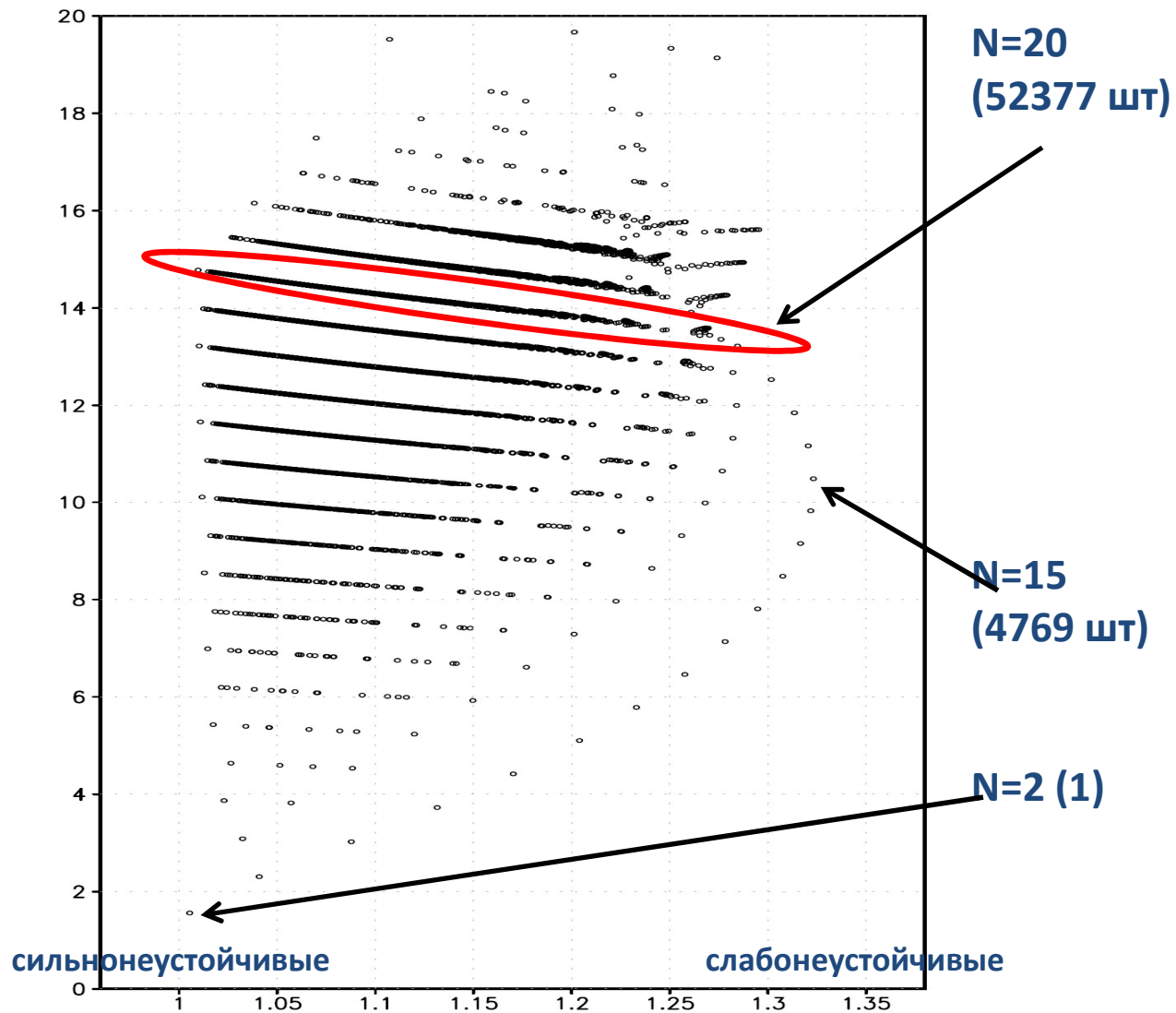
Число орбит в системе Лоренца-63 (для  $k < 26$ )

$$N(k) = (2^k - 2 - \sum_p p N(p)) / k$$

где  $k$  – число элементарных вращений вокруг стационарных точек,  $p$  – простые делители.

Можно их все найти и посмотреть, будет ли сходимость по  $k$ .

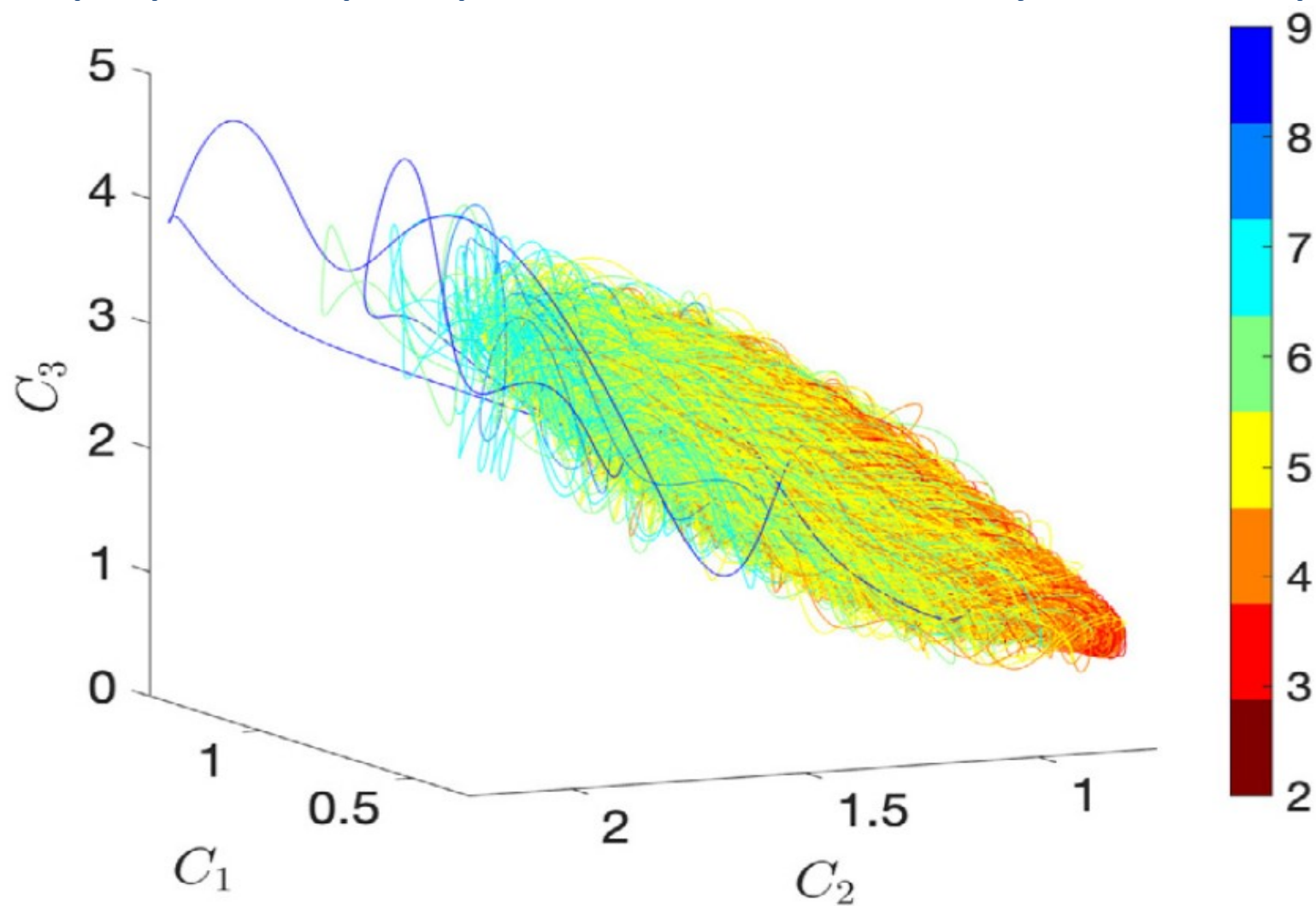
# Период орбиты ( $\gamma$ ) vs обратный показатель Ляпунова ( $x$ )



**Значительная неоднородность характеристик неустойчивости, сходимость «не быстрая»**

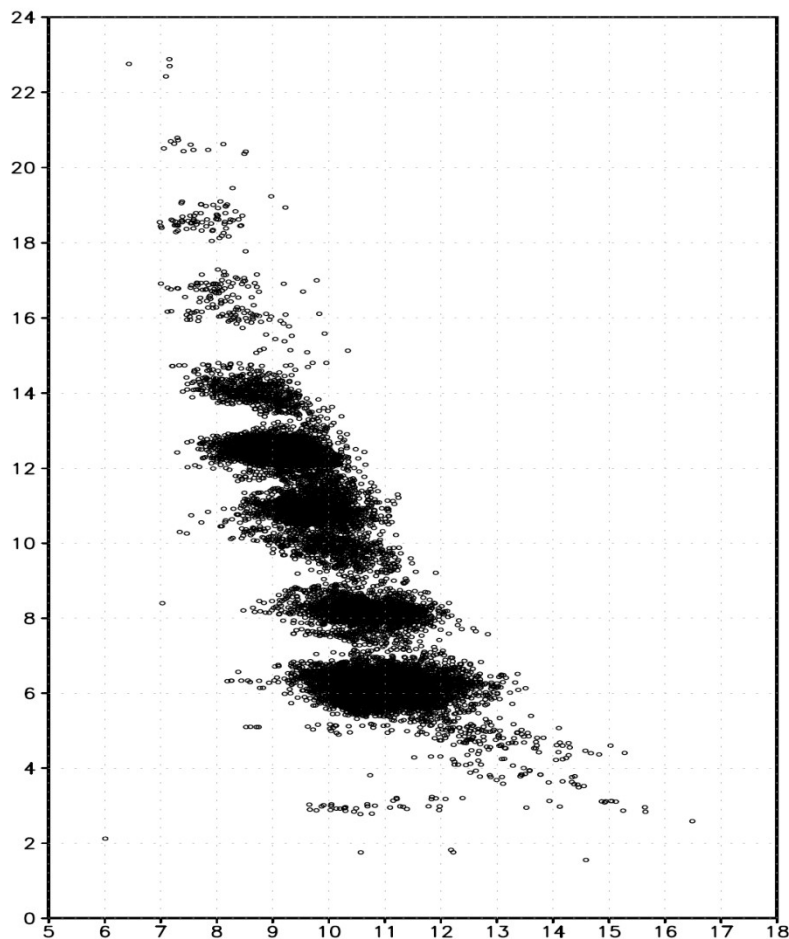
## Орбиты в системе ЛОРЕНЦ-96

Пространство первых трех моментов, цвет – число неустойчивых направлений

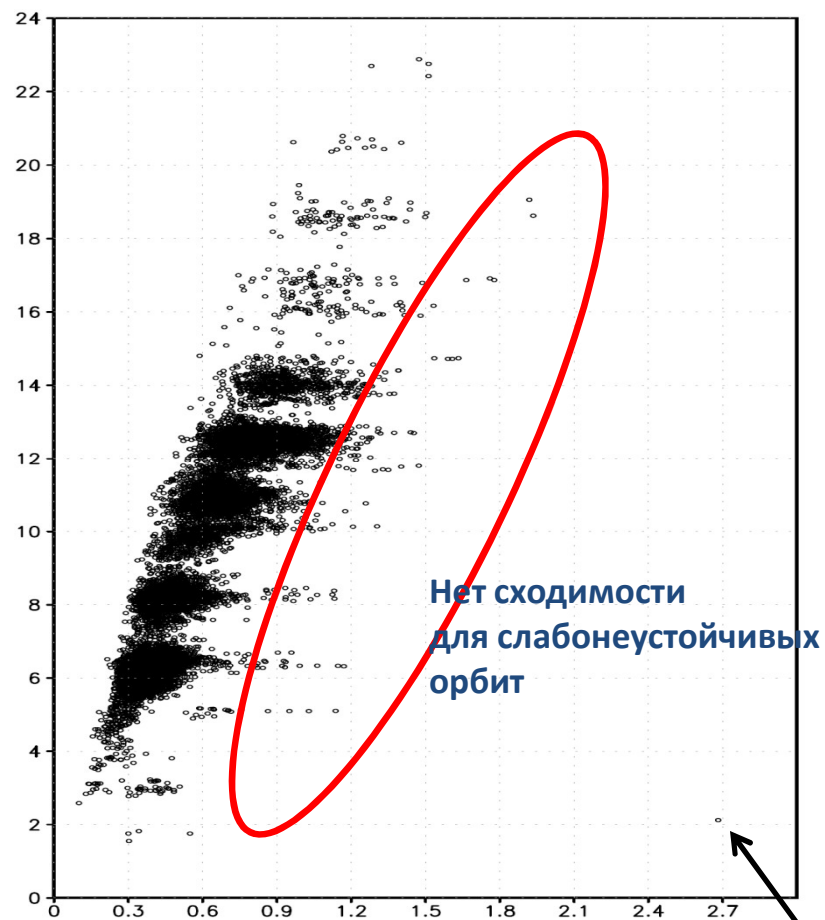


**Значительная неоднородность по числу неустойчивых направлений**

Период орбиты ( $\gamma$ ) и размерность КУ ( $x$ ) в модели Лоренц-96



Период орбиты ( $\gamma$ ) и обратный показатель Ляпунова ( $x$ ) в модели Лоренц-96

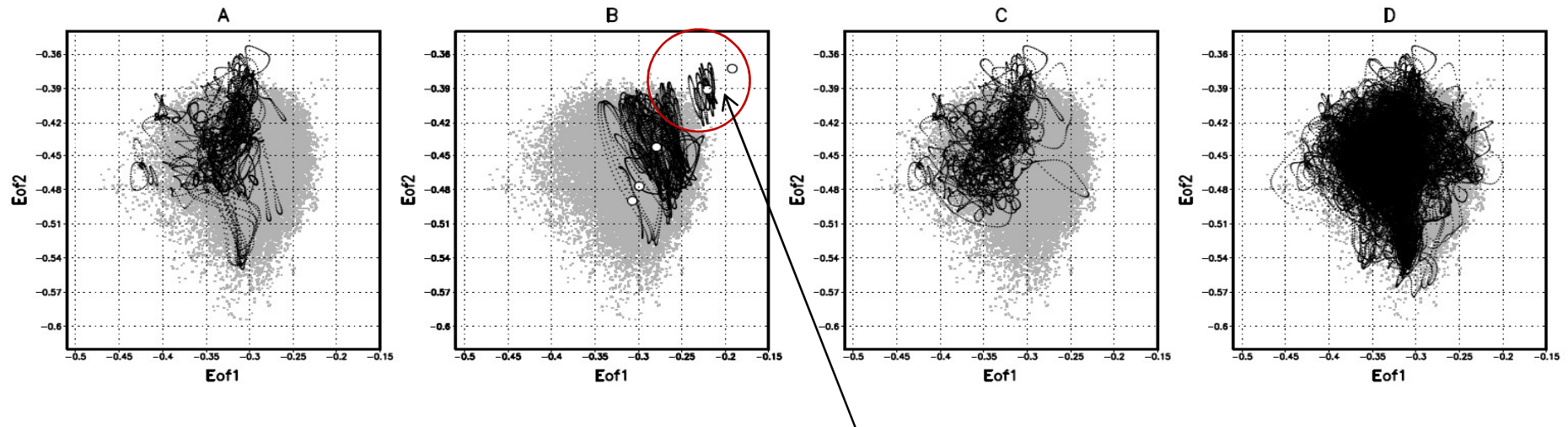


Значительная изменчивость числа неустойчивых направлений у периодических траекторий и величины первого Ляпуновского показателя свидетельствуют о негиперболичности системы.

# Неустойчивые орбиты в баротропной модели T12

(плоскость EOF1-EOF2)

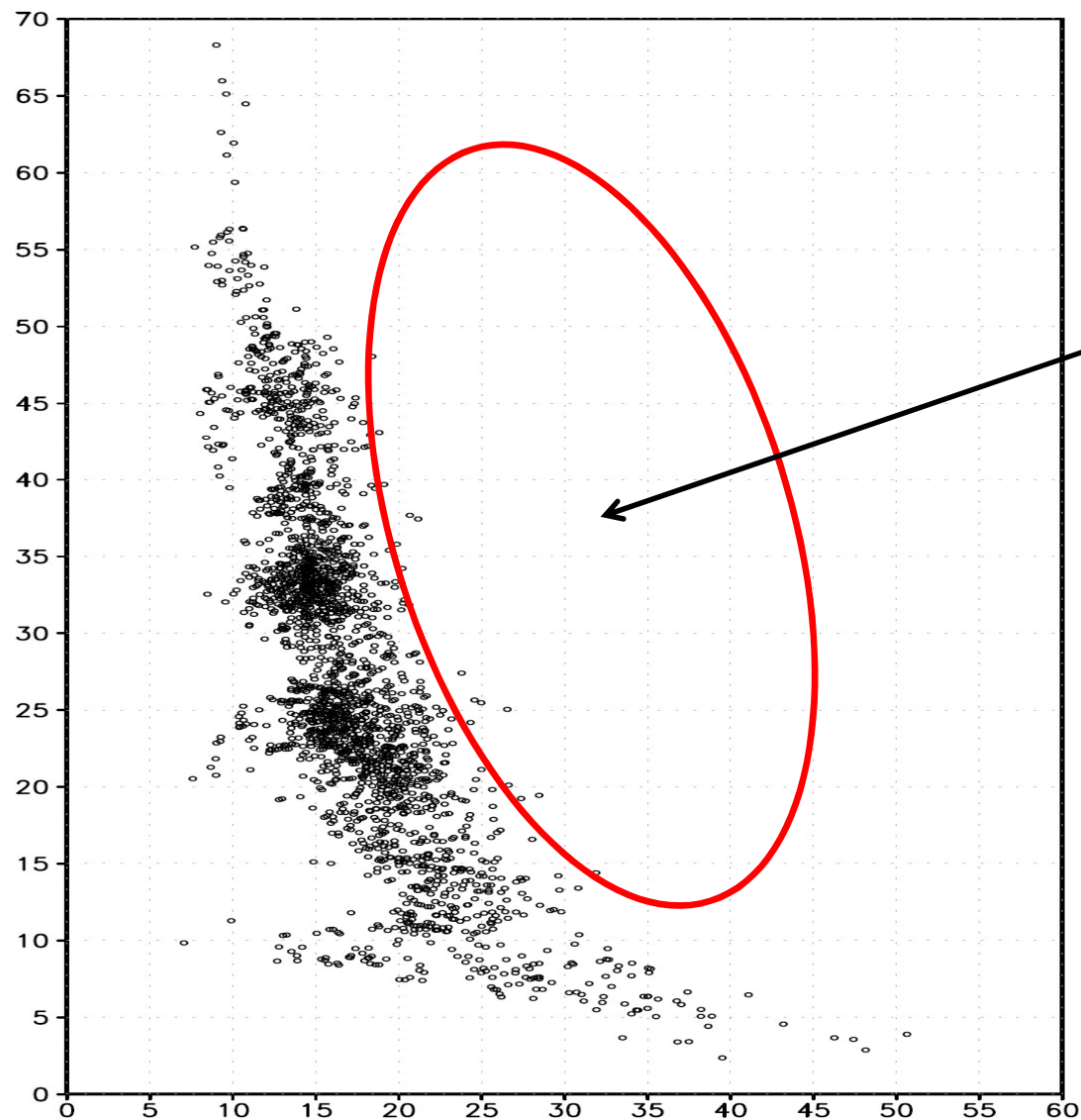
- A) 120 орбит с наименьшими периодами и ансамбль состояний траектории 10000 дней (серый цвет);
- B) 20 наименее неустойчивых орбит 5 стационарных точек;
- C) 100 наиболее неустойчивых орбит;
- D) 500 наименее неустойчивых орбит.



- Некоторые орбиты не принадлежат аттрактору
- Короткие орбиты не аппроксимируют аттрактор (A)
- Наименее неустойчивые орбиты не аппроксимируют аттрактор
- Орбит нужно много и разных!**

# Баротропная модель атмосферы T21

Период орбиты ( $\gamma$ ) и неустойчивая размерность ( $x$ )

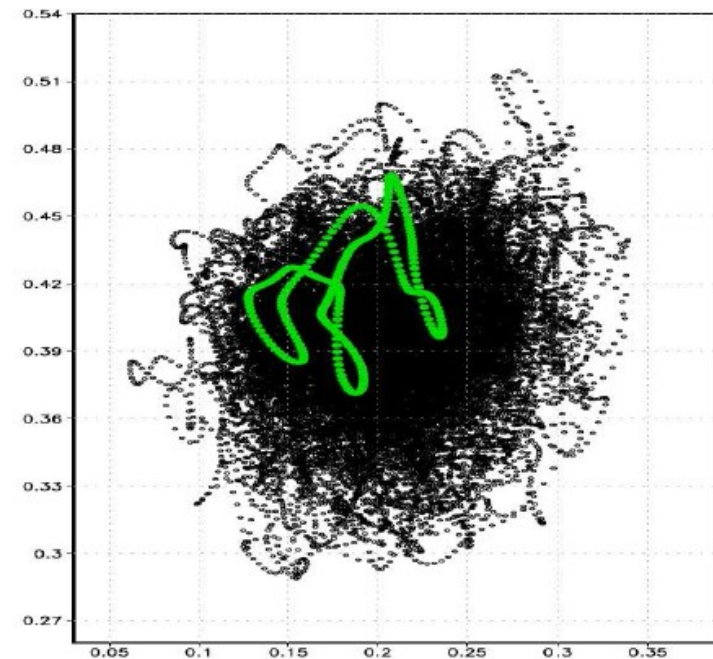


Сложно найти длинные  
сильно неустойчивые  
орбиты

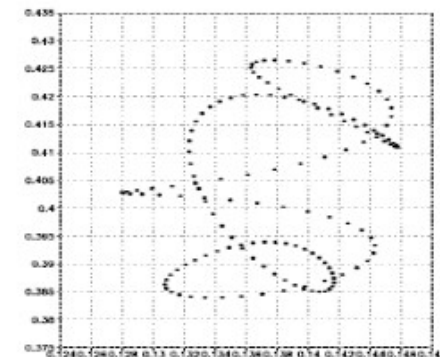
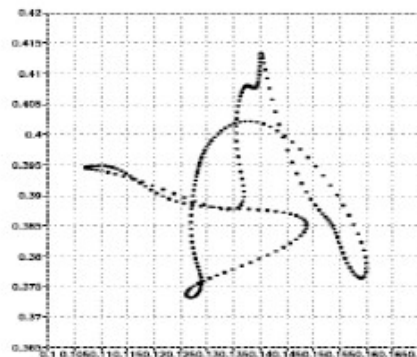
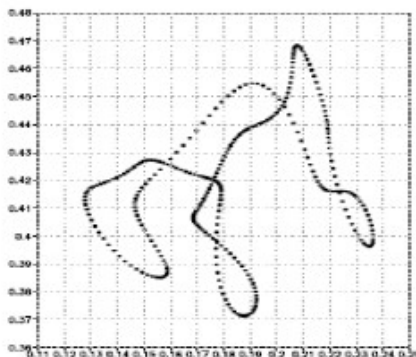
Большая изменчивость  
характеристик устойчивости,  
негиперболичность

# Орбиты в модели Маршала-Молтени

- ★ 2500+ орбит найдено
- ★ Число неустойчивых направлений: 30-90+
- Периоды: 2-15+ дней  
длиннее искать очень дорого



## Некоторые орбиты в плоскости ЕОФ1 и ЕОФ2



**1. Модели динамики атмосферы имеют бесконечное множество неустойчивых периодических решений. Их поиск является увлекательным занятием.**

- **Iteration methods prefer to find hyperbolic orbits.**
- **Search results strongly depend on initial conditions.**
- **It is very difficult to find long orbits (no good i.c.).**
- **For larger models one could expect a lot of difficulties (more near-to-zero Lyapunov exponents, more instability, slower code).**

# Моды изменчивости: баротропная модель

2D Navier-Stokes system + forcing + rotation + boundary & turbulent friction + orography

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l + H) = -\alpha \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + f_{ext}.$$

$J, \Delta$  Jacobian and Laplacian

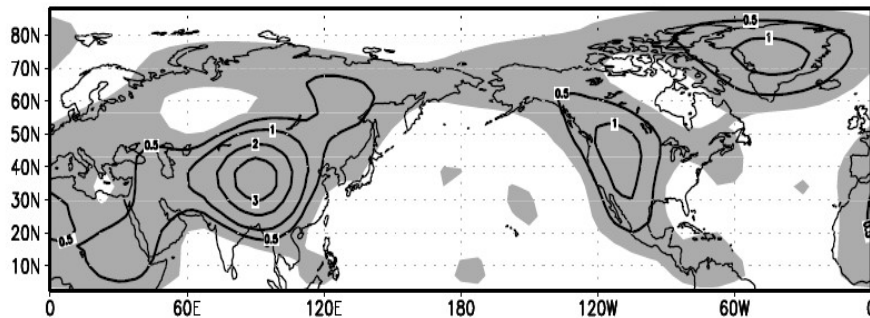
$l$  Coriolis parameter

$\alpha, \mu$  Boundary & turbulent friction  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$   $\mu = 6 \cdot 10^{-5}$

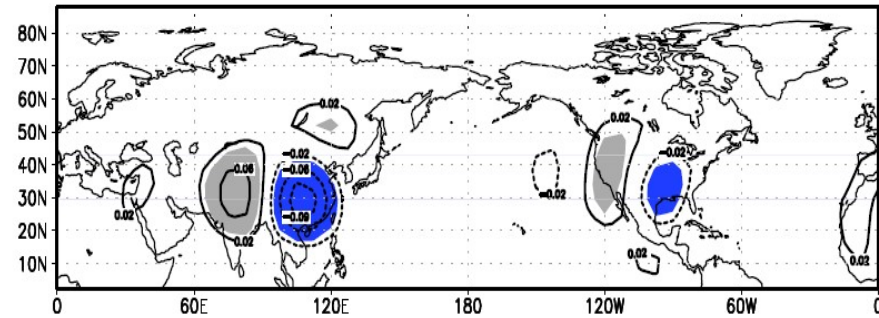
$f_{ext}$  Climate (constant in time) forcing

$H$  (Real) Orography

Galerkin method, T12/T21 resolution (spherical harmonics  $m < 13(22)$ ), Phase space dim=78 (231)



Model orography

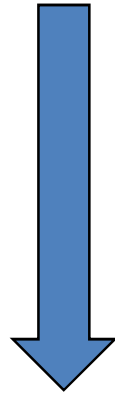


$$f_{ext} = J(\psi_r, \Delta \psi_r + l + H) + \alpha \Delta \psi_r - \mu \Delta^2 \psi_r.$$

## Линеаризация относительно среднего

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial t} + J(h, \Delta \bar{\psi} + l + H) + J(\bar{\psi}, \Delta h) + \alpha \Delta h - \mu \Delta^2 h = 0$$

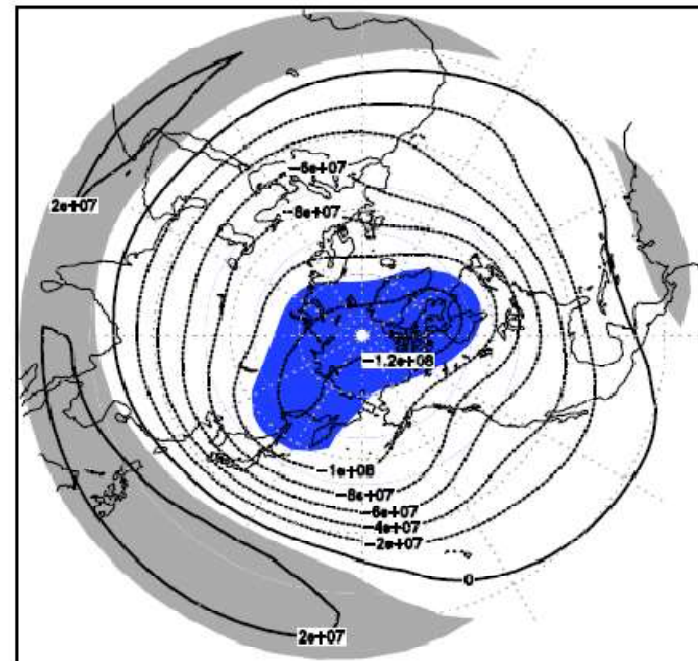
$$\frac{\partial h}{\partial t} = Ah + R(h)$$



$$R(h) \Rightarrow -\lambda h + \zeta$$

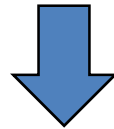
$$\frac{\partial h}{\partial t} = (A - \lambda E)h + \zeta$$

$\bar{\psi}$



## Linear approximation

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l + H) = -\alpha \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + f_{ext}.$$

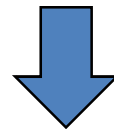


$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta^{-1} J(h, \Delta \bar{\psi} + l + H) - \Delta^{-1} J(\bar{\psi}, \Delta h) - \alpha h + \mu \Delta h + \Delta^{-1} J(h, \Delta h)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = Ah + R(h) \quad R(h) \Rightarrow -\lambda h + \zeta$$

$A - \lambda E$  - stable!

$\zeta$  - Gaussian w.noise

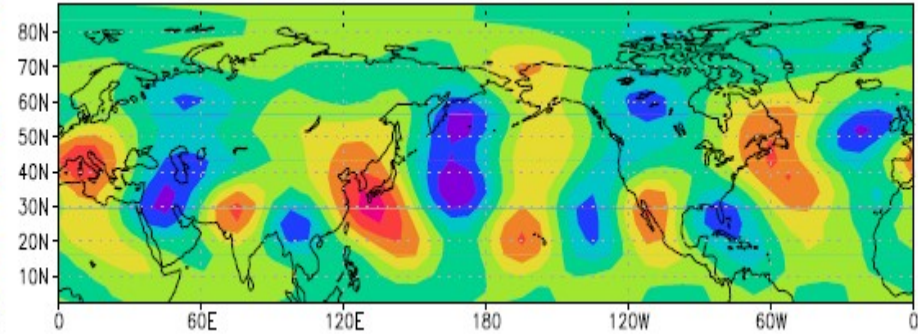
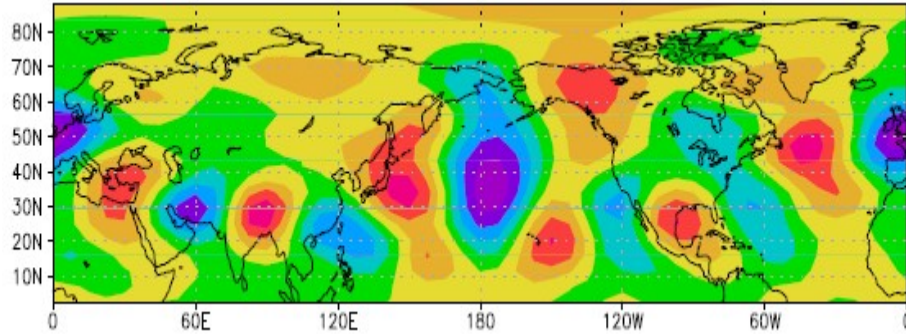
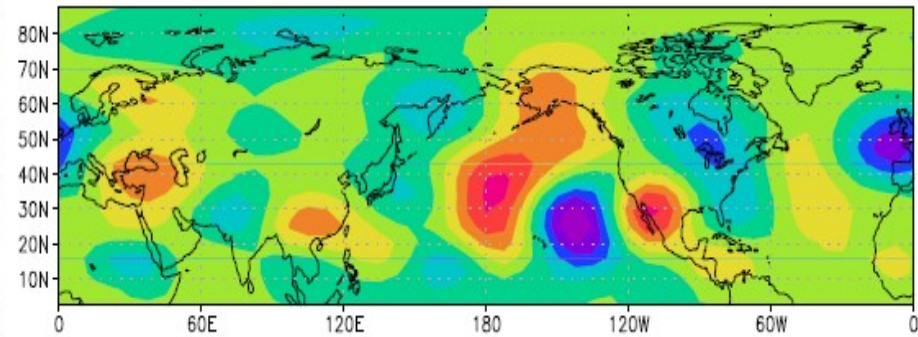
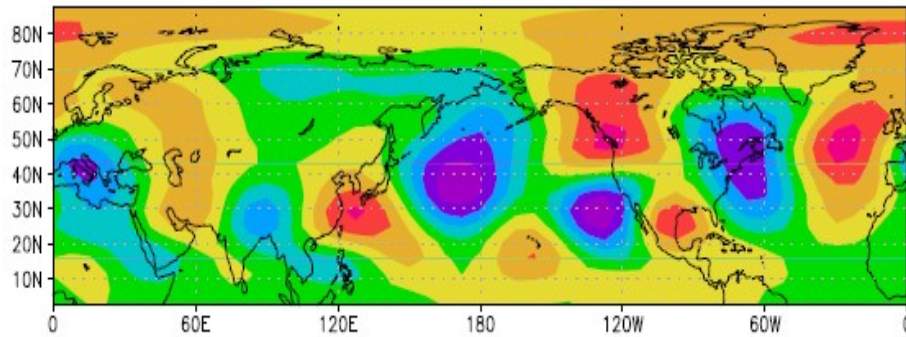


$$\frac{\partial h}{\partial t} = (A - \lambda E)h + \zeta$$

# Линейные моды:

12 неустойчивых мод (6 пар),  $\max(\text{Re } \Lambda) + 1/14$  дней

Периоды: 14, 8, 5, 56, 11, 31 дней



вверху: действительная часть моды 1

Комплексная часть моды 1

вверху: действительная часть моды 2

Комплексная часть моды 2

Волновая структуры с характерным пространственно-временным масштабом

Стандартные EOF



Комплексные EOF для диапазона периодов

# Комплексные EOF

Траектория системы  $X_j(t^i)$  (среднее убрано).

«Обычные» EOF это собственные векторы ковариационной матрицы  $C = \langle XX^T \rangle$

1. Преобразование Фурье

$$X_j \rightarrow F[X_j] = a_k + ib_k$$

2. Сдвиг  $\pi/2$  (четверть периода)

$$a_k + ib_k \rightarrow b_k - ia_k$$

3. Обратное преобразование Фурье

$$b_k - ia_k \rightarrow F^{-1}(b_k - ia_k) = \tilde{X}$$

4. Комплексная ковариационная матрица

$$Z_j = X_j + i\tilde{X}_j, C_H = \langle ZZ^* \rangle$$

5. Комплексные собственные векторы

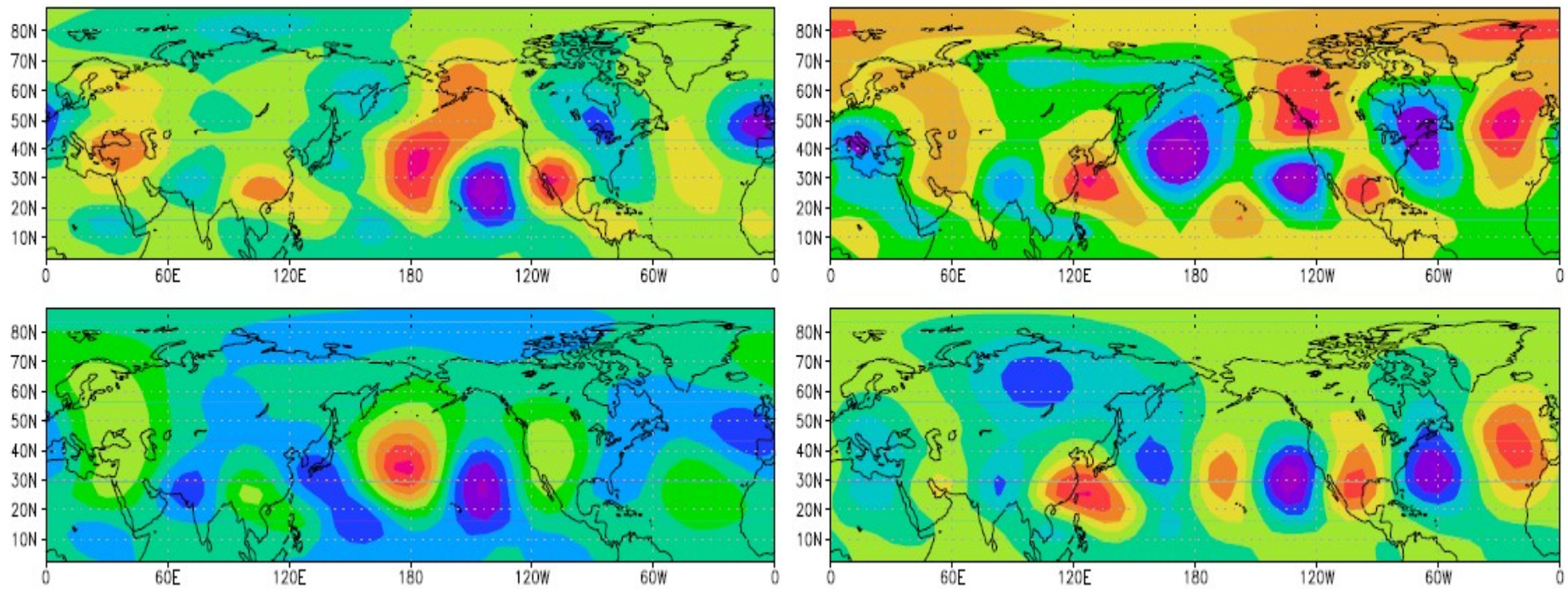
$$C_H = \langle ZZ^* \rangle$$

**Ведущие комплексные (Гильбертовы) EOF системы определяют двумерные колебательные структуры с наибольшей амплитудой.**

**E.V.1 (cmplx, real) (вверху)**

**vs**

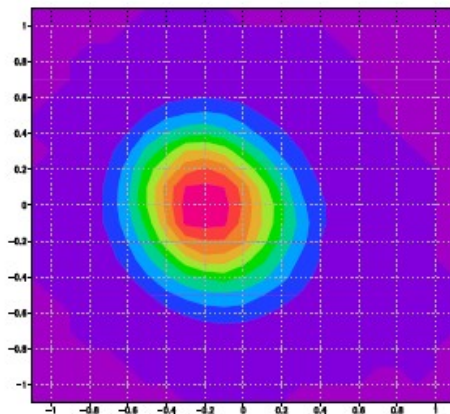
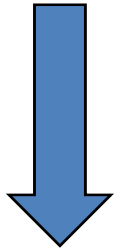
**Комплексный EOF1 (+ 9-16 дневный фильтр) (внизу)**



**Пространственная корреляция 0.73/0.77, почему так?**

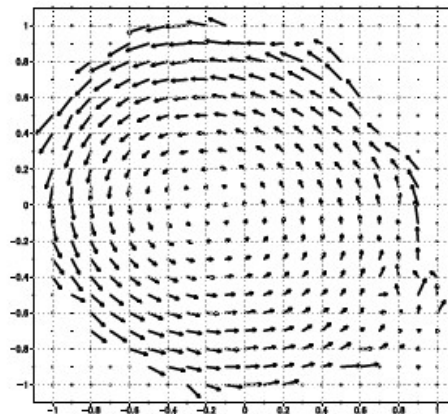
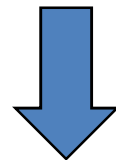
# Динамика на плоскости ведущей СЕОФ1 (фильтр 09-16 дней)

Проекция  
ПДФ на  
плоскость  
СЕОФ1



Тенденция  
 $(\Psi(t+\delta) - \Psi(t)) / \delta$

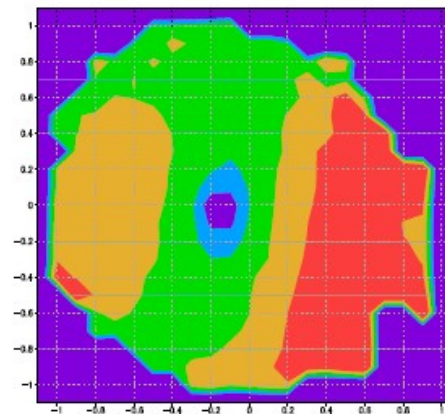
в проекции  
на СЕОФ1 (лаг 0.5д)



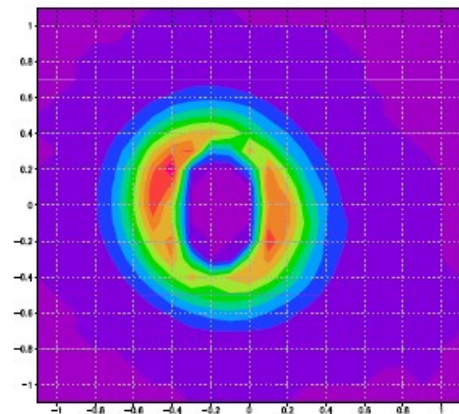
Период обращения  
(вокруг ср.сост.)

$$T_\delta$$

Красный > 20 дней  
Оранжевый 16-20 days  
Зеленый 12-16 дней



ПДФ для состояний  
с проекцией  
тенденции > 0.3  
на СЕОФ1

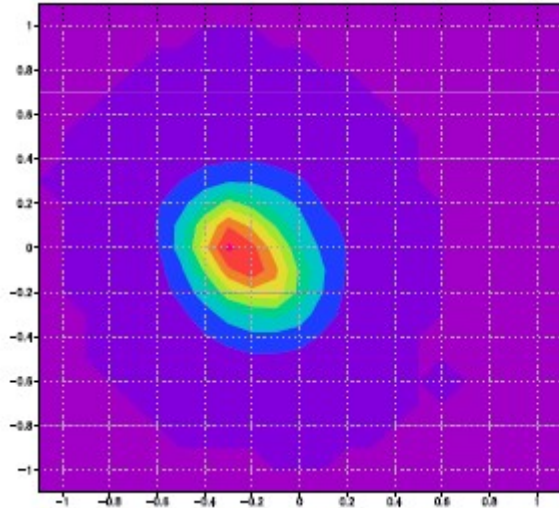
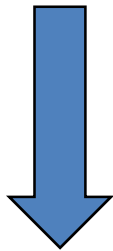


Движение в плоскости вдоль СЕОФ1 представляет собой вращение с периодом 12-20 дней, но происходит вдалеке от среднего состояния.

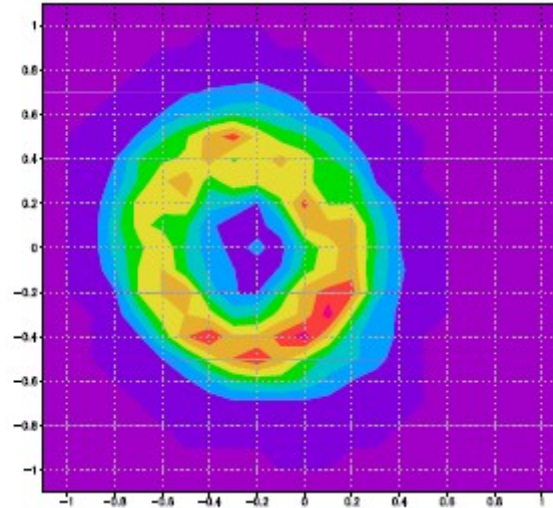
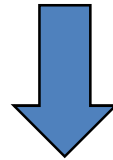
$$T_\delta = 2\pi\delta / a \cdot \sin\{\Psi'_{12}(\delta) \times \Psi'_{12}\} / |\Psi'_{12}(\delta)| |\Psi'_{12}| \}$$

## Орбиты на плоскости SEOF1 (фильтр 09-16дней)

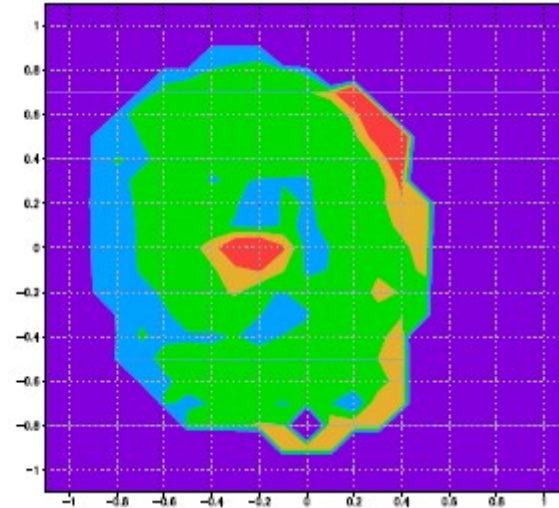
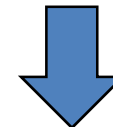
Все орбиты  
(ПДФ) на  
SEOF1



Орбиты UPOs с  
проекцией  
тенденции  $> 0.6$  на  
SEOF1



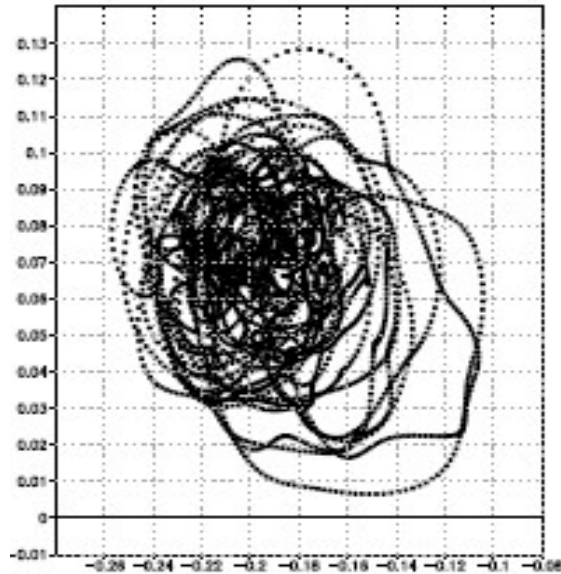
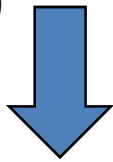
Период вращения  
Оранжев.  $> 16$ days  
Зеленый 14-16 дней  
Голубой 12-14 дней



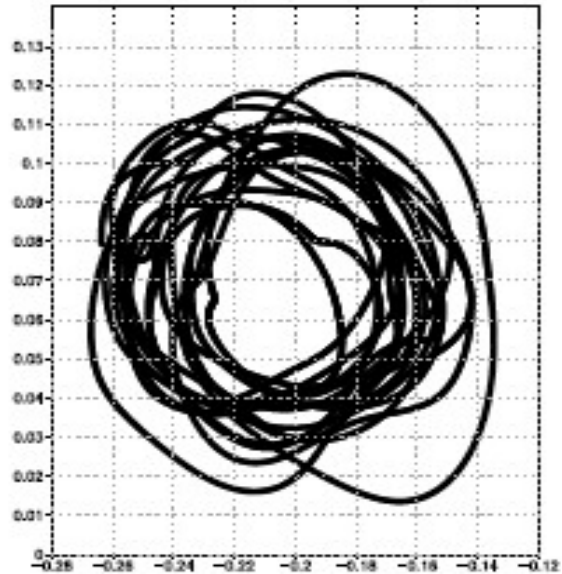
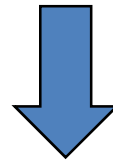
**Пространственная структура и период ведущих орбит совпадает с соответствующими характеристиками SEOF1 и ведущей пары нормальных мод.**

## UPOs on leading CEOF1 plane (09-16d bandpassed)

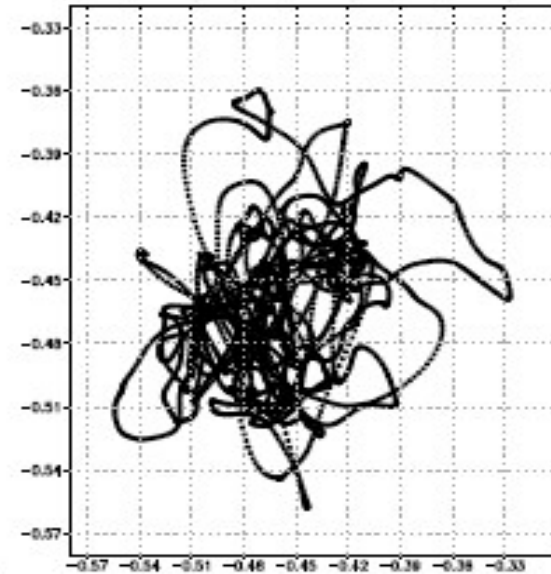
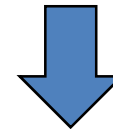
System trajectory  
(5000d) at CEOF1  
(when 60% of the  
tendency is at CEOF1  
plane)



UPOs having at least  
60% of the tendency  
along CEOF1

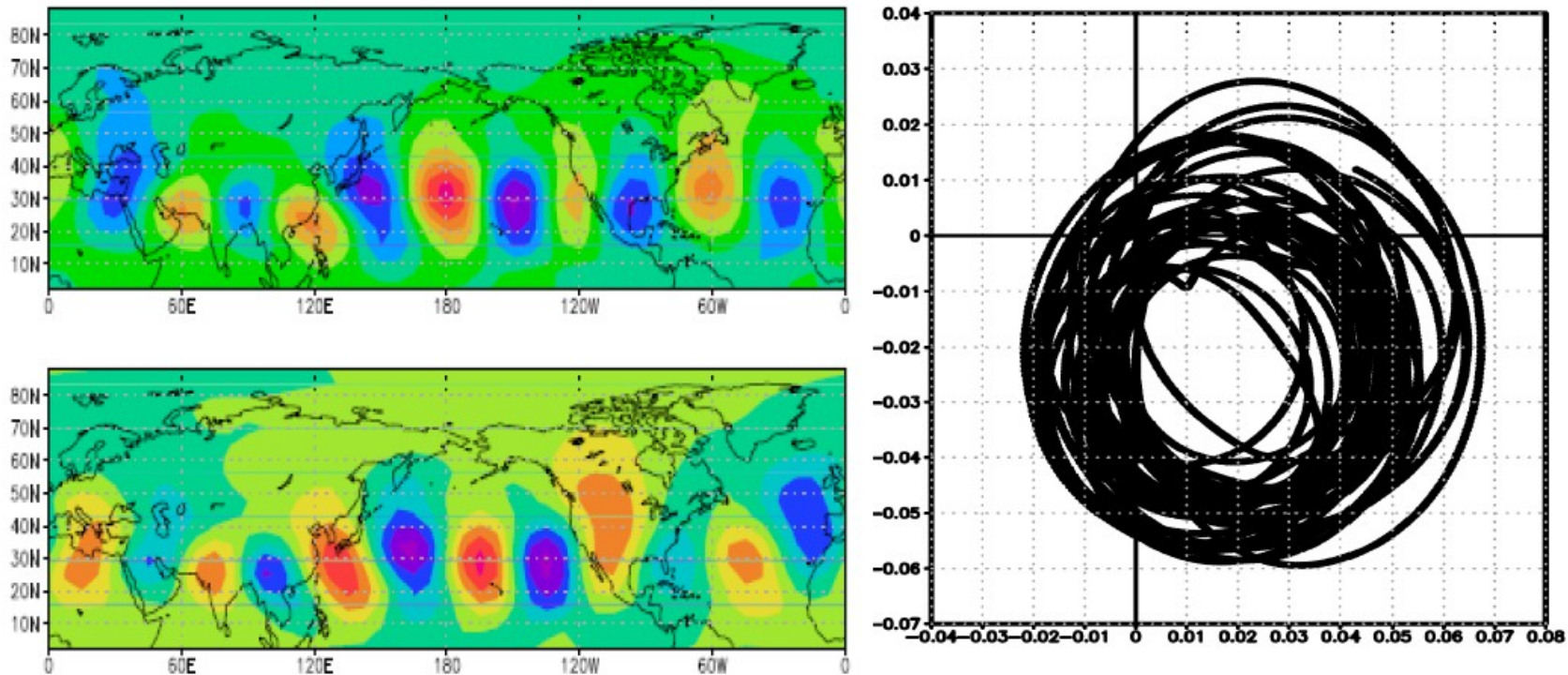


System trajectory at  
EOF1-EOF2 (when  
60% of the tendency  
is at EOF1-EOF2  
plane)



**System shows regular rotational behavior when moving along CEOF1 plane. This is not always the case.**

**СЕОФ1 для фильтрованные в 5-9 дневном окне (слева) и динамика 7-дневных орбит в этой плоскости**

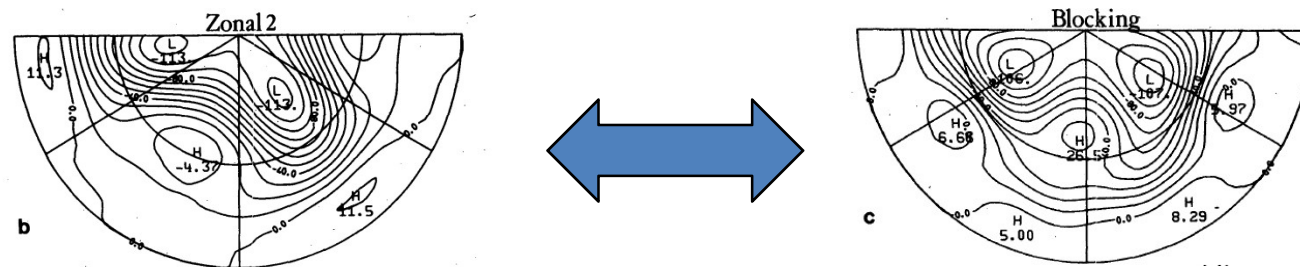


**Структура изменчивости, действительно, объясняется существованием соответствующих неустойчивых орбит, расположенных в плоскости нормальных мод линейной теории**

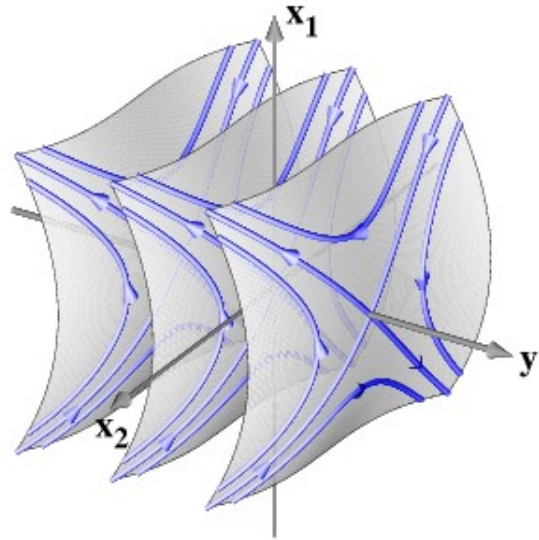
# Режимы циркуляции

Система замедляется около стационарной точки и можно ожидать формирования максимума ПДФ (т.н. “погодный режим”).

- Время жизни режима зависит от характеристик устойчивости соответствующей стационарной точки
- Динамика системы может быть приближенно описана переходами между режимами



*Реальная динамика атмосферы, кажется более сложной, во всяком случае стационарные точки недостаточны для описания характеристик «режимов»*



# Аппроксимация траекторий орбитами

Любая траектория гиперболической системы может быть приближена периодической орбитой с произвольной точностью

Атмосферные модели хаотические, имеют ненулевые Ляпуновские показатели, но не являются системами Аносова. Можно ли как-то использовать орбиты?

## Аппроксимация статистик орбитами

Среднее вдоль траектории  $\bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \Phi(\psi_i)$

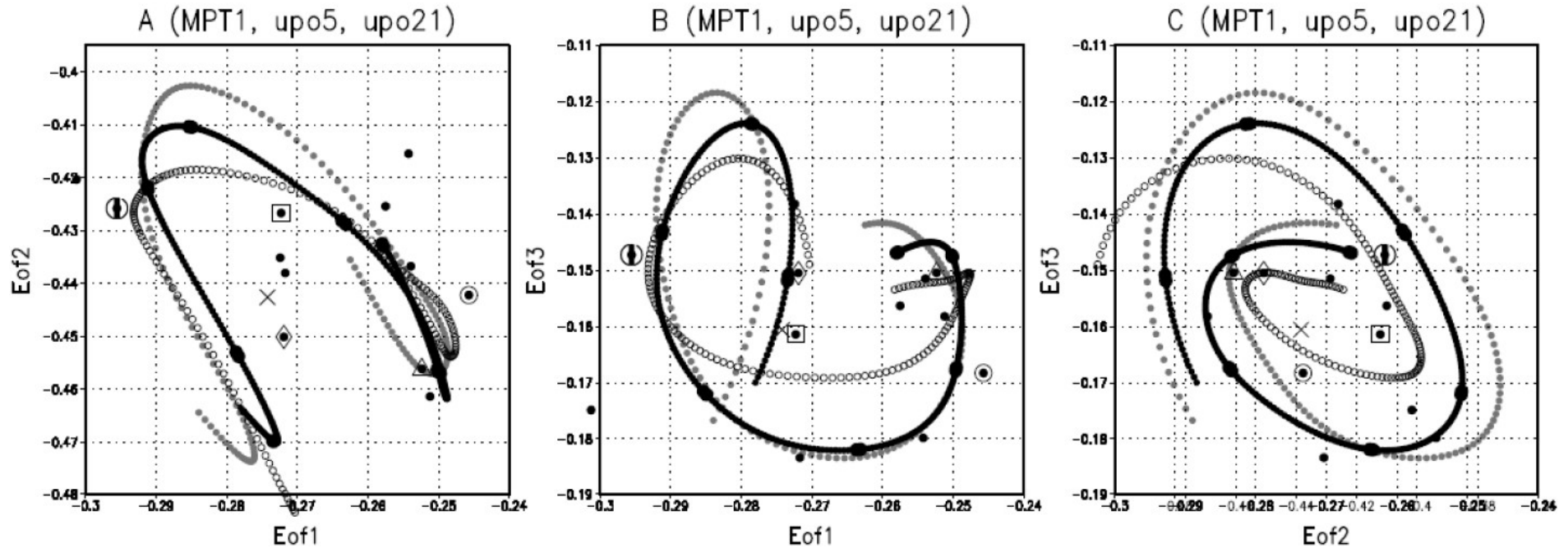
Аппроксимируется взвешенным средним  $\bar{\Phi} = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \sum_p w_p \Phi_p \quad W = \sum_p w_p$

Формула для весов в системах Аносова  $w_p = 1 / \exp(T_p \sum \lambda^+)$

$\Phi_p$  - значение функционала  $\Phi$  для  $p$ -ой периодической точки

$\sum \lambda^+$  - сумма положительных показателей Ляпунова орбиты  $p$   
**Важны наименее неустойчивы орбиты!**

# Наиболее вероятные состояния и орбиты в модели T12



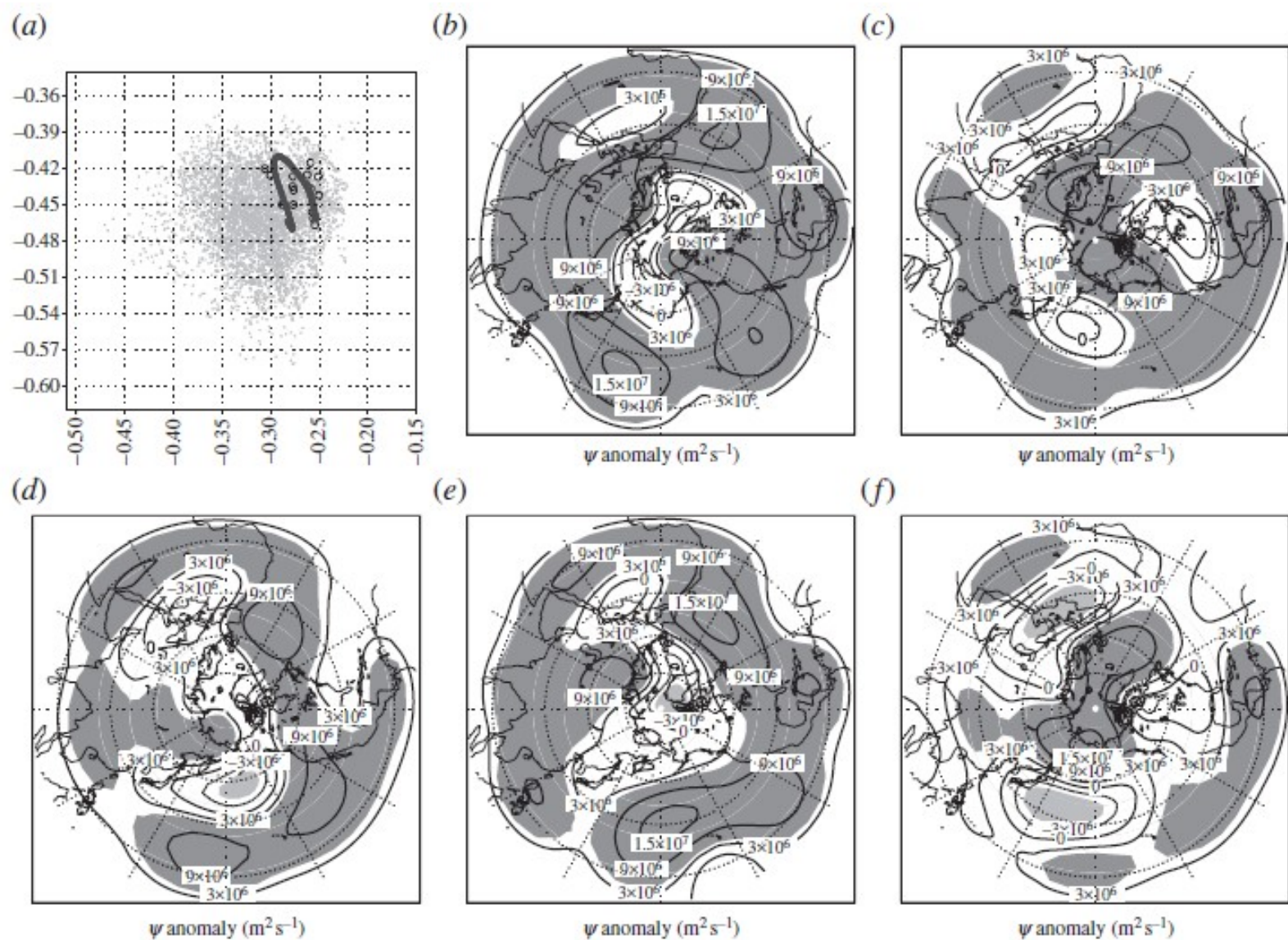
**Наиболее вероятная траектория системы (MPT), черный**

**Наиболее вероятные состояния (MPS) системы (MPS1 - окружность, MPS2 – квадрат, MPS3 – бриллиант, MPS4 – треугольник, MPS5 окружность со штрихом)**

Две слабонеустойчивые орбиты (5ая и 21ая), серый

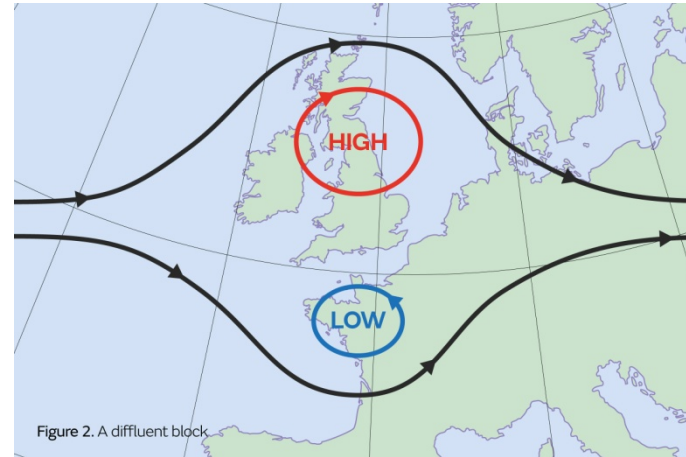
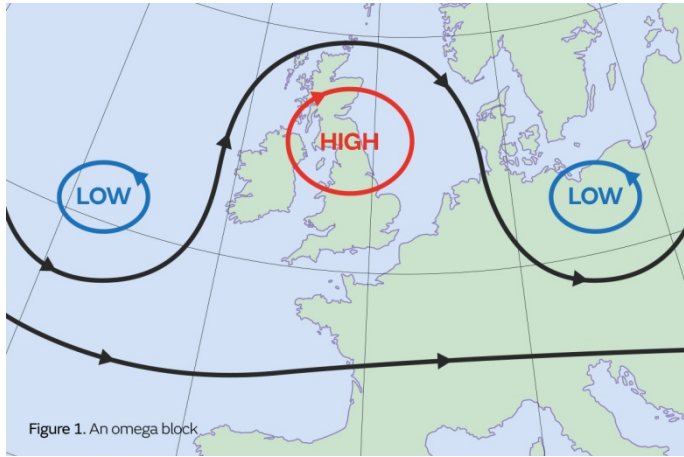
Наименее неустойчивая стационарная точка, крест

**MPSы и MPT находятся в области расположения наименее неустойчивых орбит, соединяющих режим A (MPS4) с режимом G(MPS1) и R(MPS5).**



**Figure 5.** MPSs of the T12 model: (a) 20 MPSs and most probable 30 days trajectory (on EOF1–EOF2 plane) together with model 10 000 day trajectory (grey); (b) MPS1; (c) MPS2; (d) MPS3; (e) MPS4; (f) MPS5.

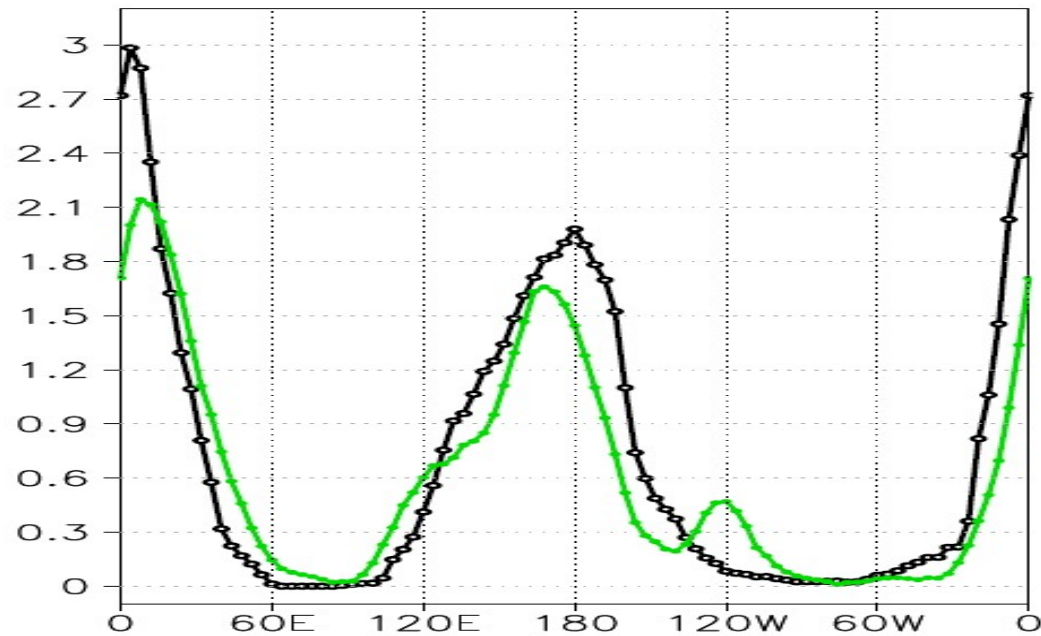
# Блокинг – характерный пример погодных режимов



- **ослабленная зональная циркуляция**
- **время жизни до месяца**
- **образование и распад сложно предсказывать**
- **Критерий Тибальди - Молтени (для 500hPa)**

$$\begin{array}{l} DPsi_N = \psi(\phi_N, \lambda) - \psi(\phi_B, \lambda) < -0.0066 \\ DPsi_S = \psi(\phi_B, \lambda) - \psi(\phi_S, \lambda) > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \phi_N = 80^\circ + \Delta, \quad \phi_B = 60^\circ + \Delta, \quad \phi_S = 40^\circ + \Delta \\ \Delta = -4^\circ, 0^\circ, +4^\circ \end{array}$$

## Блокинги в модели Маршала-Молтени есть!

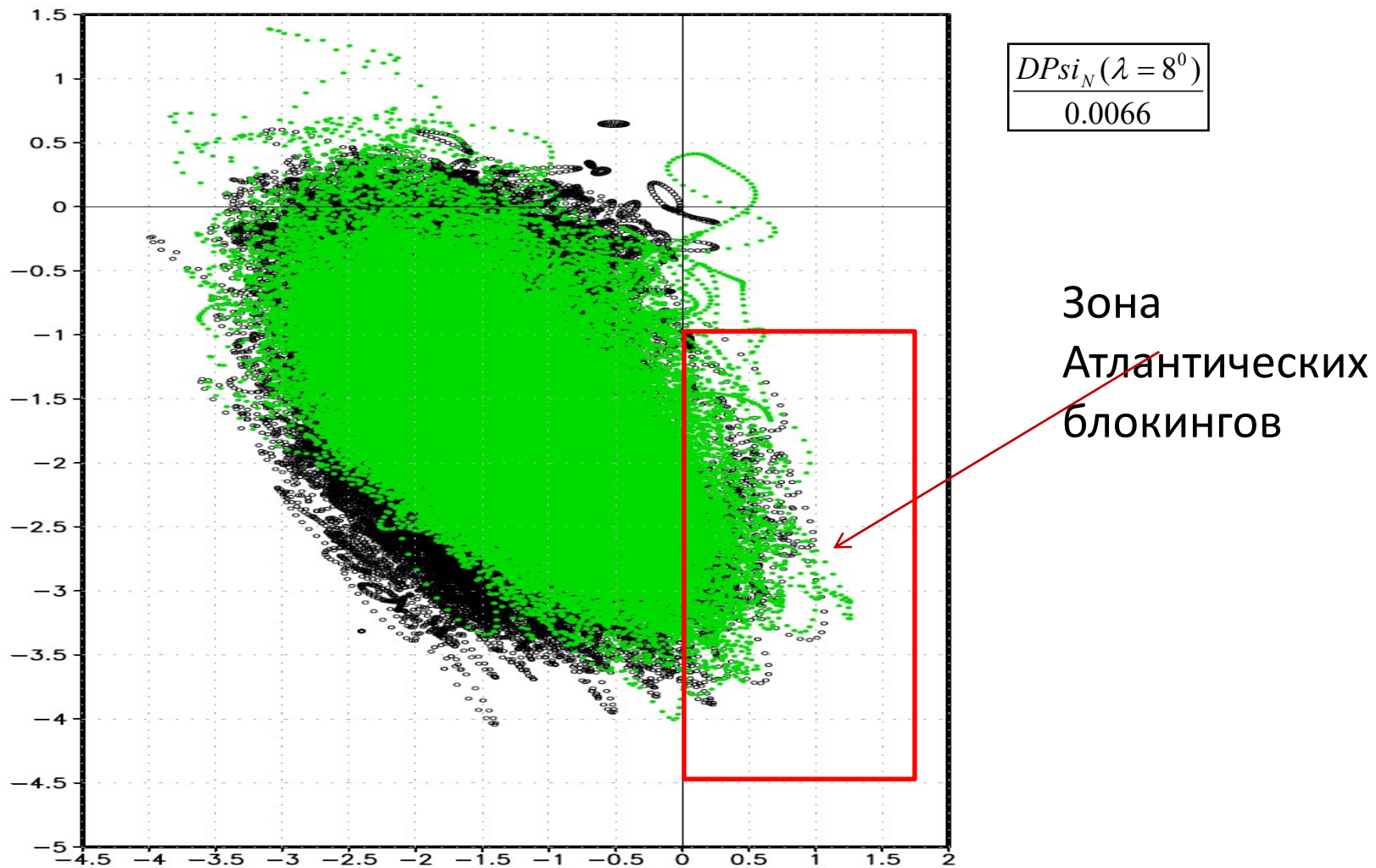


- Число блокингов продолжительностью более 2 дней (в % от длины анализируемого ряда) в зависимости от долготы:

черный – по траектории модели

зеленый – набор орбит модели

# Траектория и орбиты модели в плоскости индексов Молтени-Тибальди



черный – набор орбит

зеленый – траектория (100000 дней)

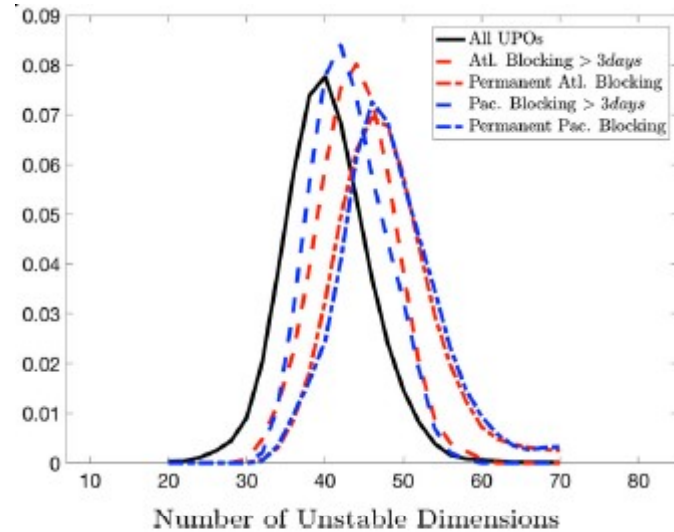
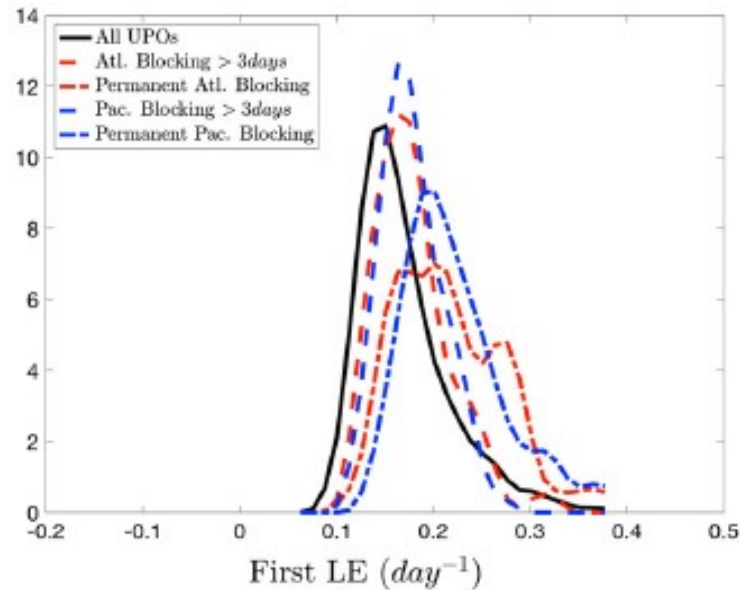
орбиты аппроксимируют зону существования блокингов в модели

$$\frac{DPsi_N(\lambda = 8^0)}{0.0066}$$

Зона  
Атлантических  
блокингов

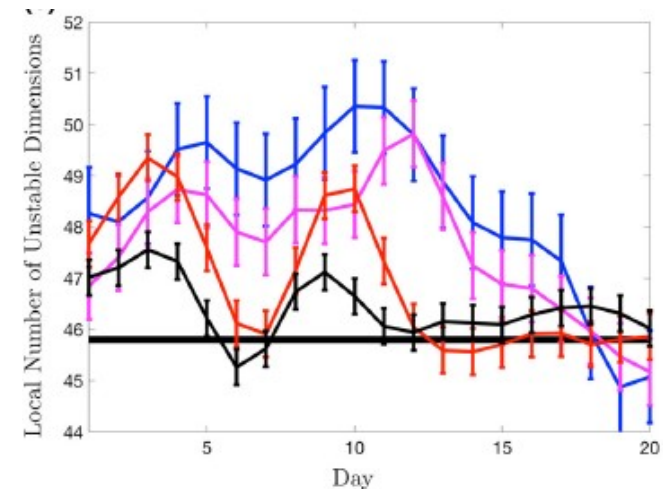
$$\frac{DPsi_S(\lambda = 8^0)}{0.0066}$$

# Неустойчивость орбит с блокированием



Распределение ведущего показателя Ляпунова (слева) и числа неустойчивых направлений (справа): для всех орбит, **Атлантических блокингов 3+ дней**, **постоянных Атлантических блокингов**, **Тихоокеанских блокингов 3+ дней**, **постоянных Тихоокеанских блокингов**

**Состояние блокирования значительно более неустойчиво, чем состояние атмосферы в «среднем»**



Число неустойчивых направлений при эволюции Атлантического блокинга (день формирования - 5)

# Предсказуемость и орбиты

## Инвариантная плотность и резонансы

$$\rho_1(y) = \int \rho(x) \delta(y - F(x)) dx = L_F \rho$$

Если  $\rho_1 = \rho$  то мера инварианта (собственный вектор оператора Ф-П с с.з. единица), если система эргодическая, то остальные с.з. по модулю меньше единицы. **Соответствующие собственные векторы – резонансы.**

Как найти (метод Улама): ввести дискретизацию фазового пространства N-мерными кубиками, спроектировать уравнение на каждый кубик (метод Галеркина). В итоге получится ( $F(x) = S^\tau(x)$ ):  $\rho_i(t_0 + \tau) = \rho_j(t_0) P_{ij}(t_0 \rightarrow t_0 + \tau)$

$$P_{ij} = \frac{\text{Prob}(x \in D_i, S^\tau(x) \in D_j)}{\text{Prob}(x \in D_i)}$$

**Ведущие резонансы – направления вдоль которых аномалия инвариантной меры затухают медленнее всего – предсказуемость!**

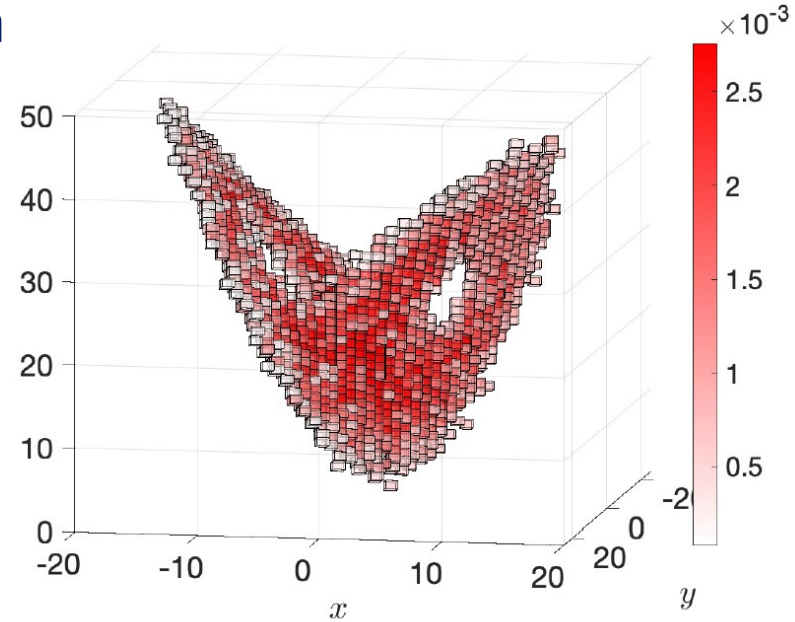
# Резонансы в модели Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

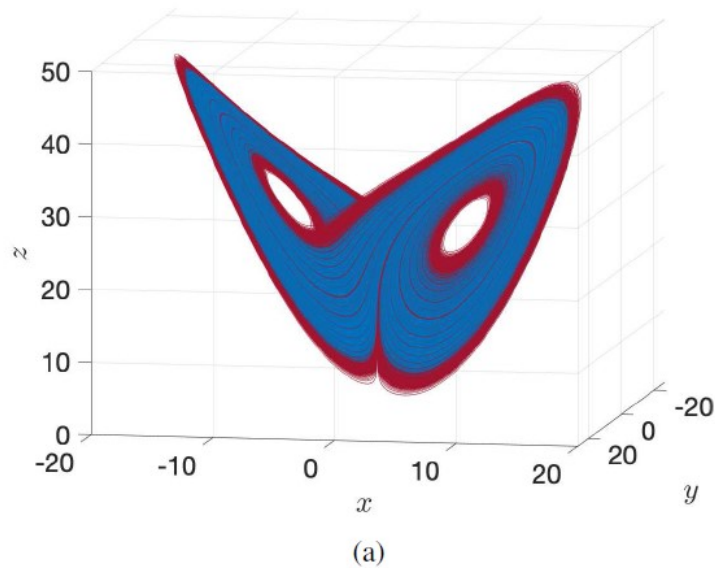
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

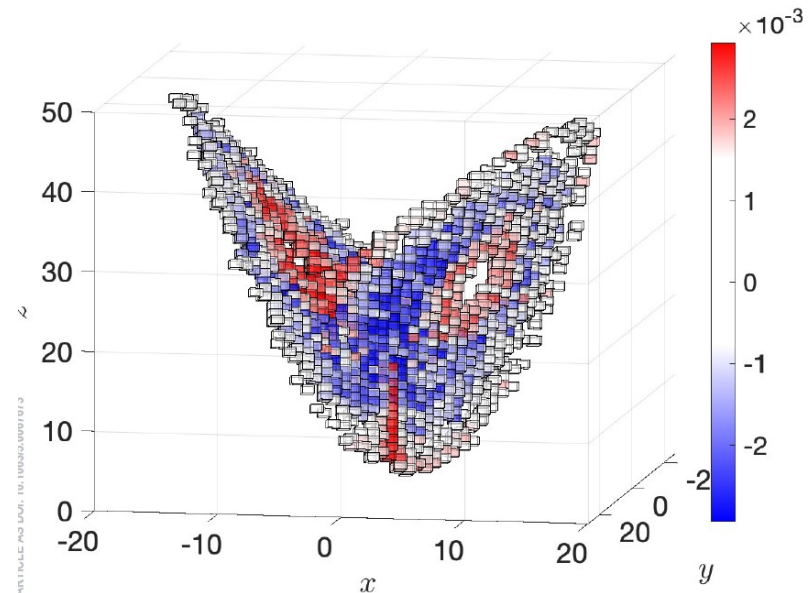
$$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$$



Базис – элементарные объемы, резонанс 1

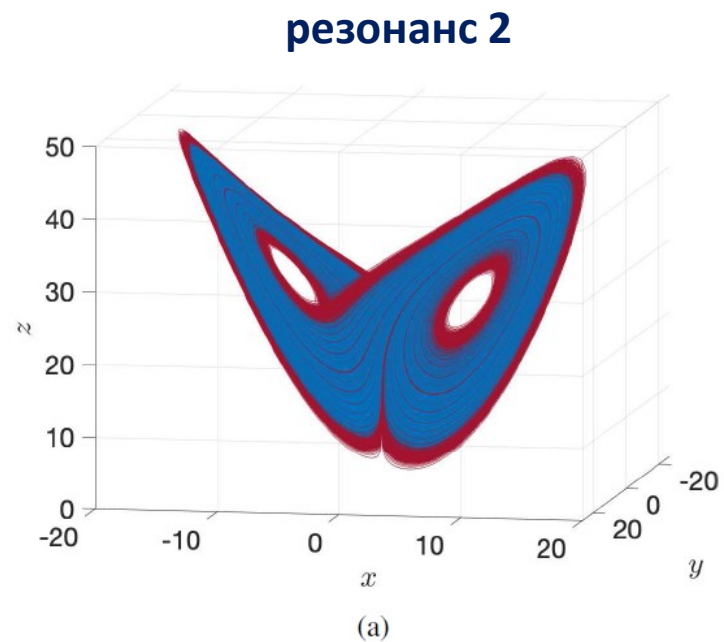
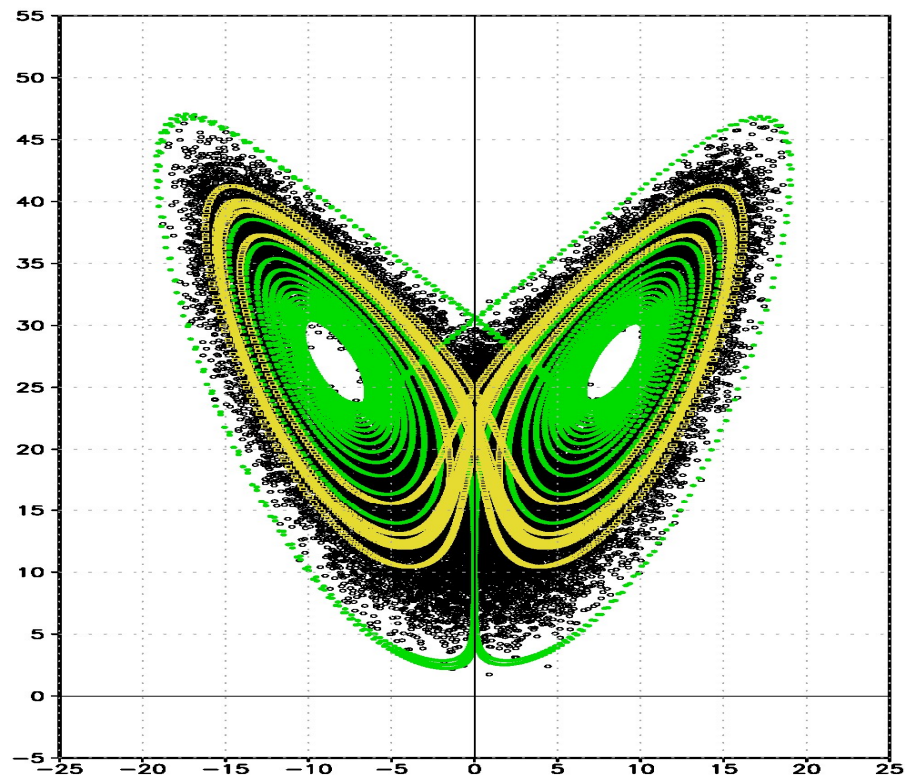


Базис – орбиты, резонанс 2



Базис – элементарные объемы, резонанс 2

## Резонансы и орбиты в модели Лоренца



**Желтый – 5 наиболее неустойчивых орбит системы Лоренца,  
Зеленый – 5 наименее неустойчивых орбит системы Лоренца**

**Наименьшей скоростью затухания обладают возмущения**

# Аппроксимация статистических характеристик с помощью орбит

Среднее вдоль траектории системы

$$\bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \Phi(\psi_i)$$



можно заменить на взвешенную сумму средних вдоль орбит

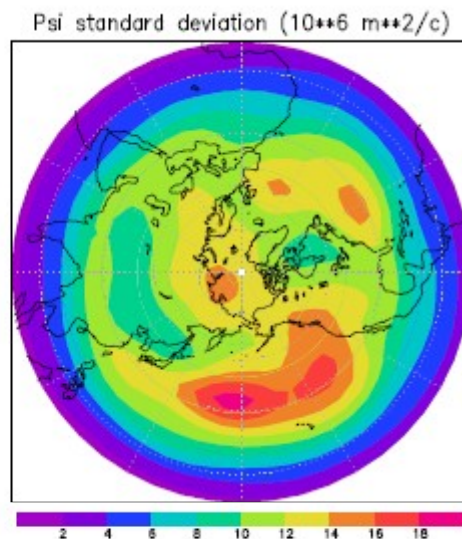
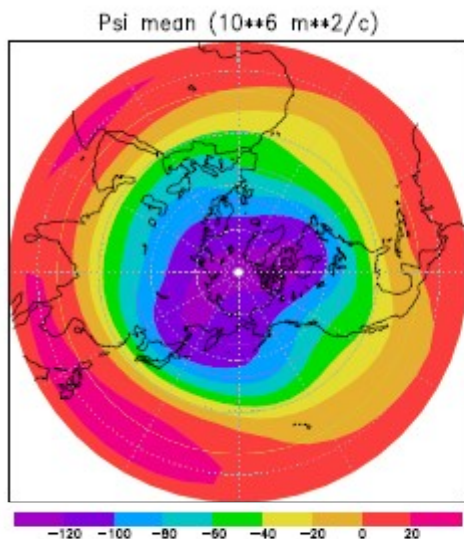
$$\bar{\Phi} = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \sum_p w_p \Phi_p \quad W = \sum_p w_p$$

веса вычисляются как

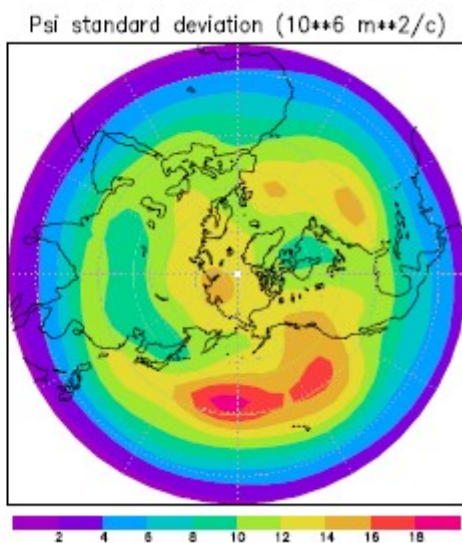
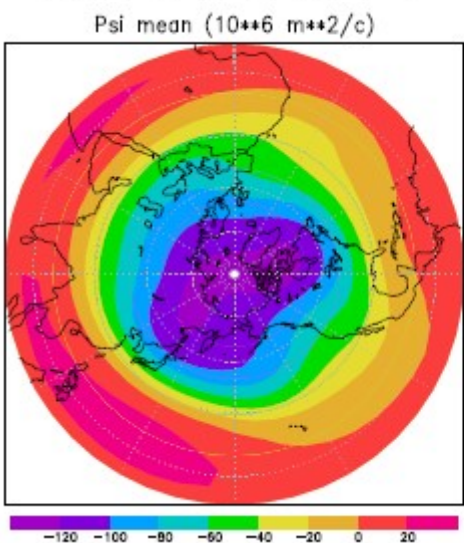
$$w_p = 1 / \exp(T_p \sum \lambda^+)$$

$\Phi_p$  среднее значение  $\Phi$  определенное для орбиты периода  $T_p$   
 $\sum \lambda^+$  сумма положительных показателей Ляпунова соответствующей орбиты.

## Реконструкция макроскопических характеристик (T21)



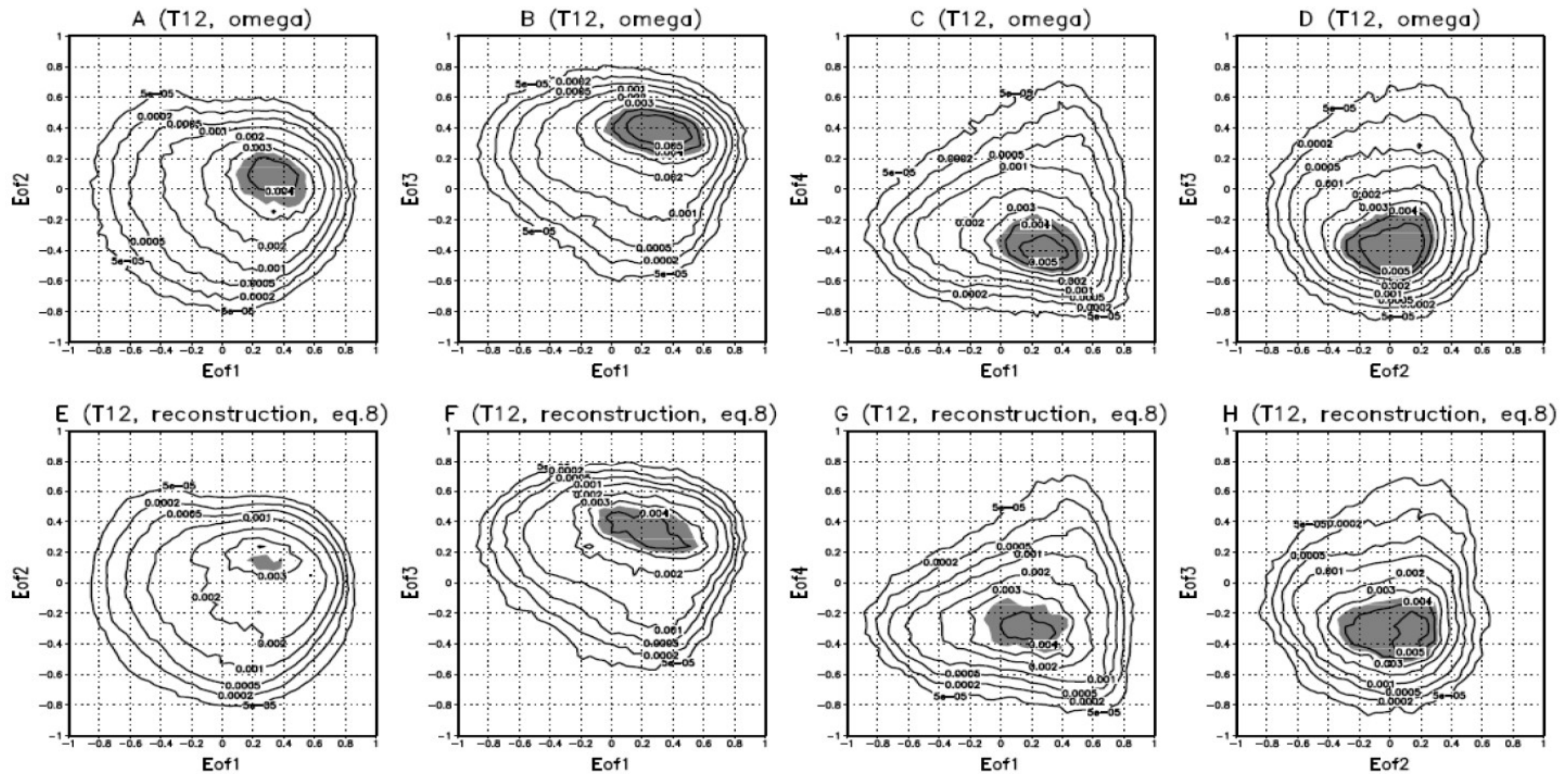
Среднее состояние и  
дисперсия функции тока



Воспроизведение с  
помощью орбит

**Крупномасштабные характеристики воспроизводятся хорошо**

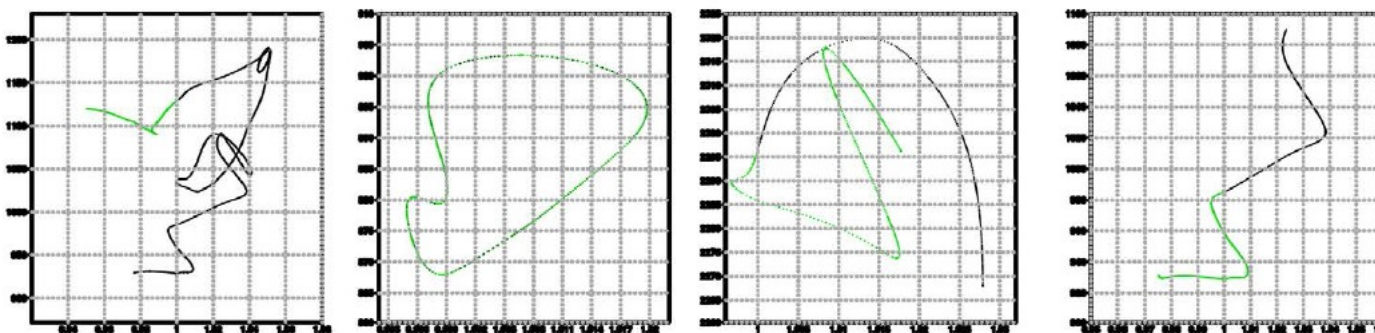
# Реконструкция плотности вероятности



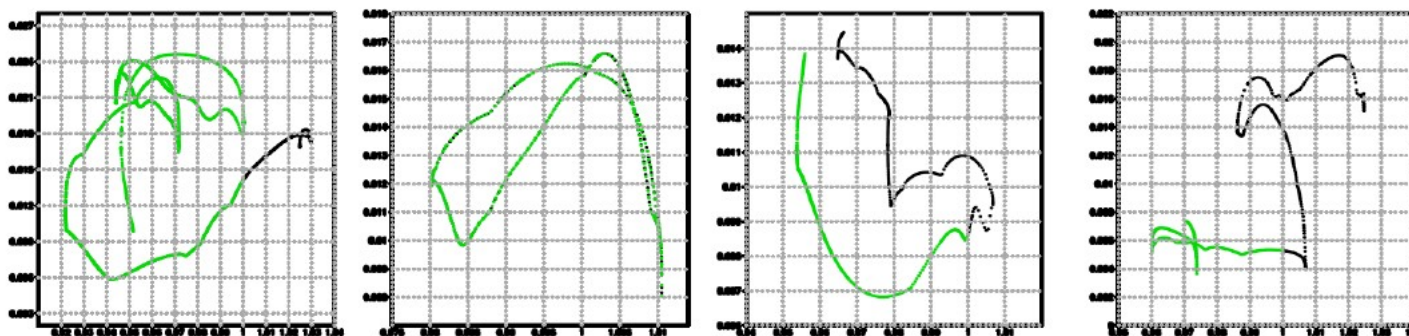
**Мелкомасштабные характеристики воспроизводятся не очень хорошо (требуется убирать «нефизичные» орбиты и манипулировать с весами)**

# Устойчивость орбит к возмущениям параметров системы (баротропная модель T12)

Bifurcation plot for UPOs period when forcing amplitude is changing

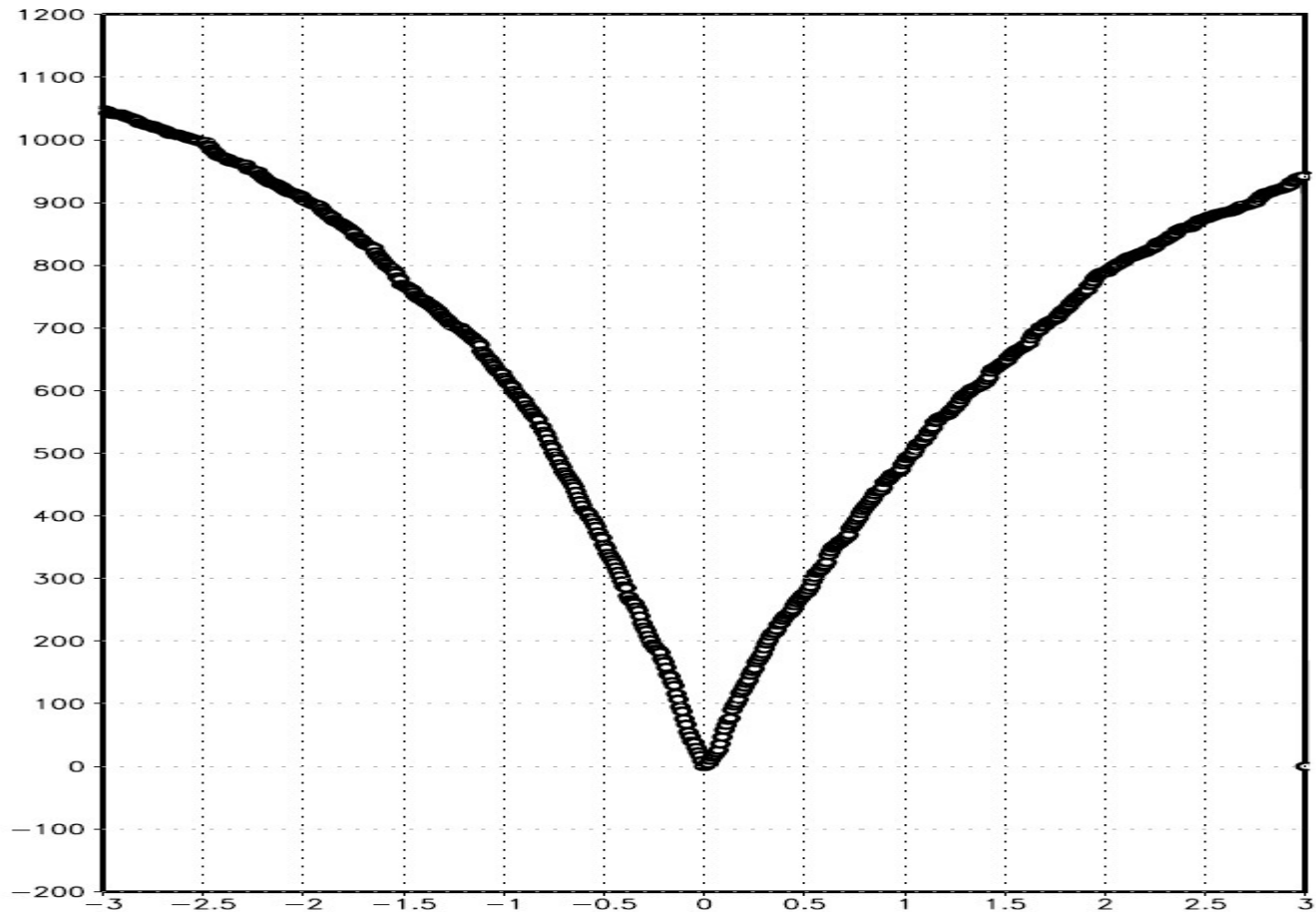


Bifurcation plot for UPOs weight when forcing amplitude is changing



**Характеристики орбит нелинейно зависят от параметров системы (часто – сильно нелинейно)**

Число орбит (всего 1300) испытывающих бифуркацию при изменении внешнего воздействия от -3% до 3%



Линейность и непрерывность изменений локальной структуры аттрактора можно ожидать лишь для малых изменений параметров. Глобальная устойчивость, по-видимому, обеспечивается чем-то другим (кластеры орбит?).

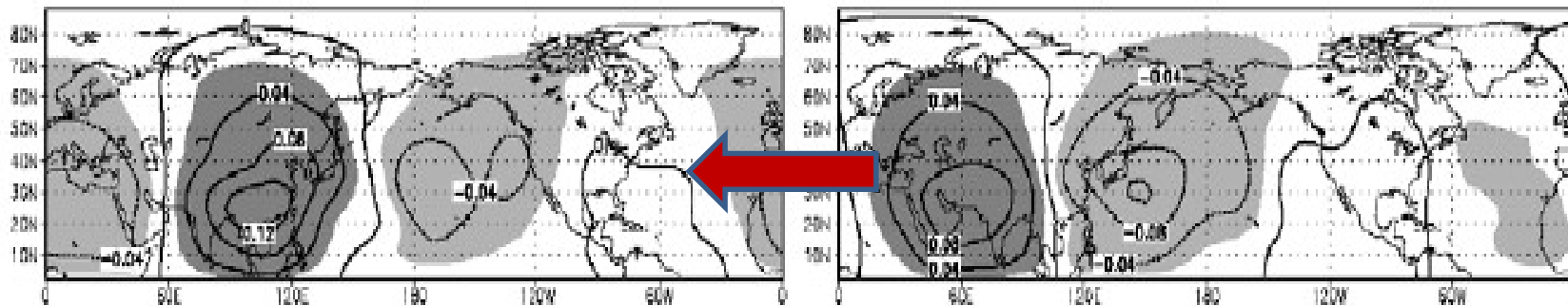
## Орбиты и особенности оклика системы на внешние воздействия

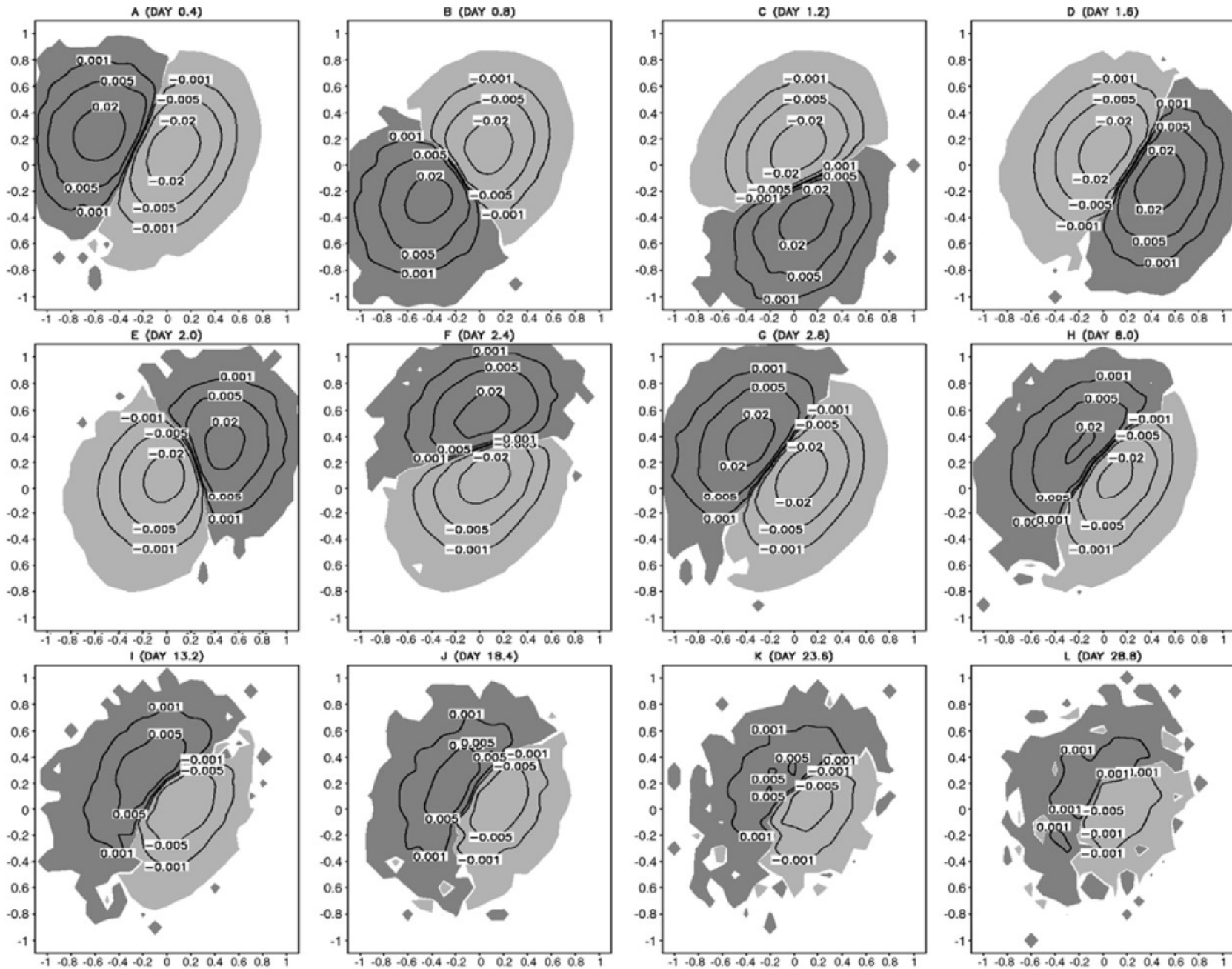
$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l + H) = -\alpha \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + f_{ext}.$$

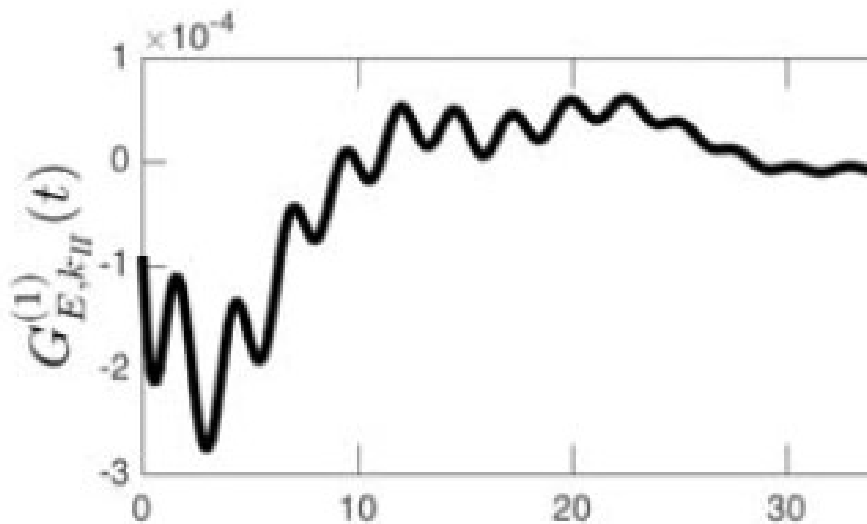


$$\delta f = \varepsilon J(\psi, h) \cdot g(t)$$

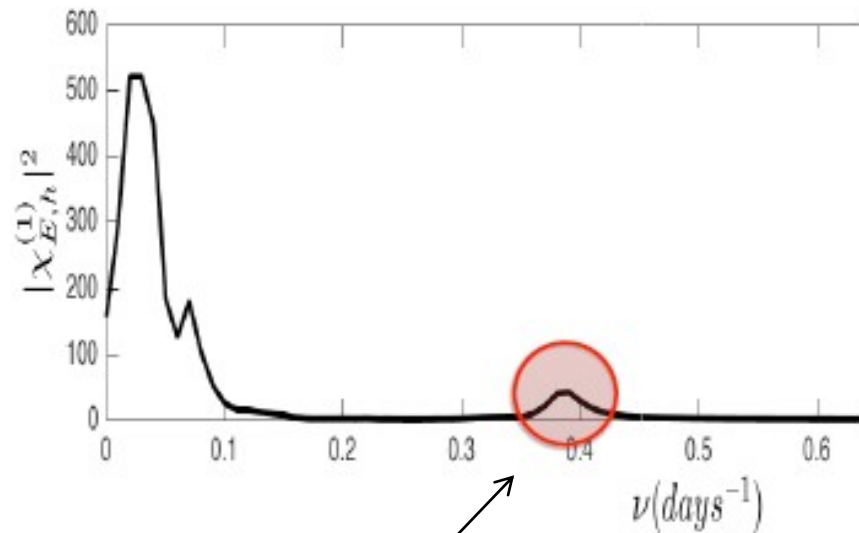
**Импульсное изменение орографии в модели возбуждает крупномасштабный отклик в системе**



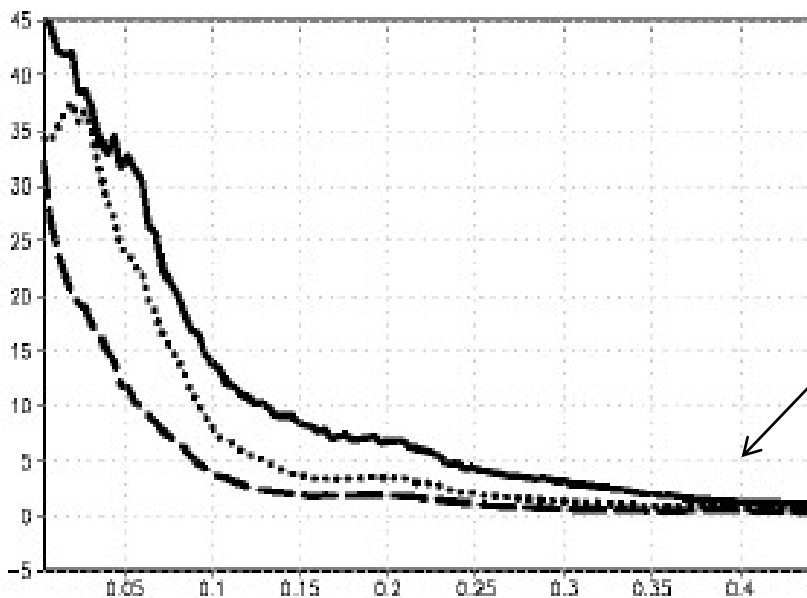




Автокорреляционная функция



Квадрат нормы преобразования Фурье функции Грина

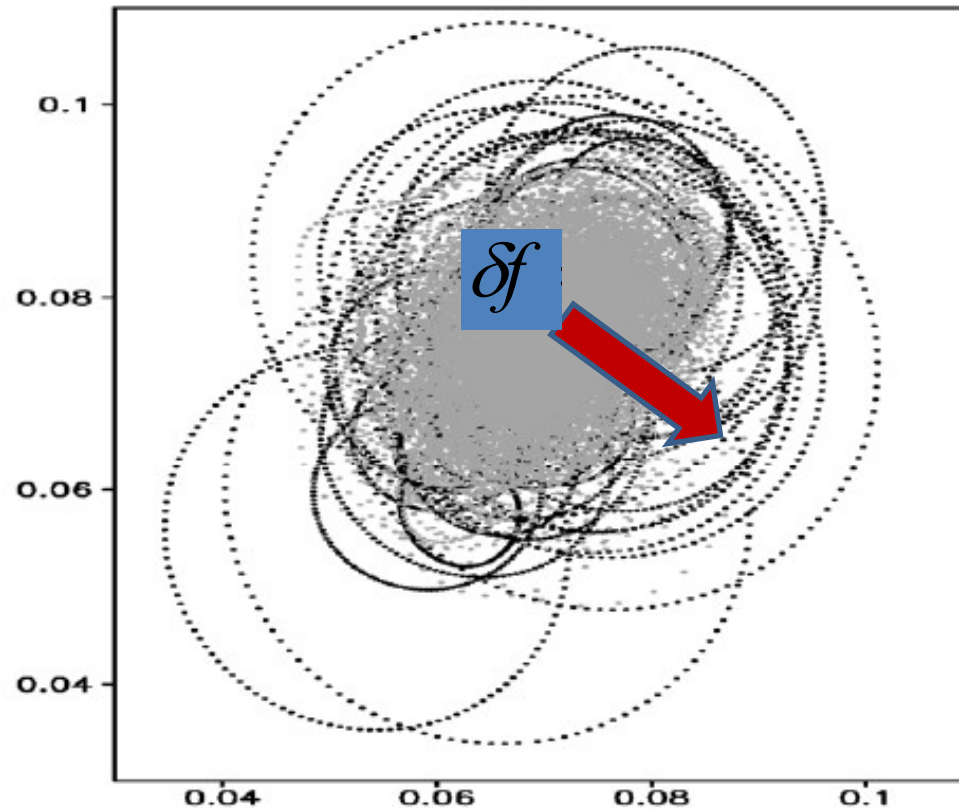


Спектры квадрата нормы функции тока, энергии и энстрофии невозмущенной системы

Нет никакой изменчивости с периодом 2.5 дня!

Нарушение флуктуационно-диссипационной теоремы!

Периодические траектории модели (черный) и невозмущенная траектория системы (серый) спроектированная на плоскость отклика



**“Колебательное” поведение объясняется наличием (сильно) неустойчивых орбит системы, находящихся в части фазового пространства, в которое не посещается траекторией невозмущенной системы. «Нефизичные» орбиты могут быть важны.**

1. Модели динамики атмосферы имеют бесконечное множество неустойчивых периодических решений. Их поиск является увлекательным занятием.
2. Периодические орбиты аппроксимируют **крупномасштабные** статистические характеристики системы с достаточно высокой точностью.
3. Количественные прогнозы (особенно отклика на внешние воздействия), основанные на применении хаотической гипотезы **требуют осторожности**.

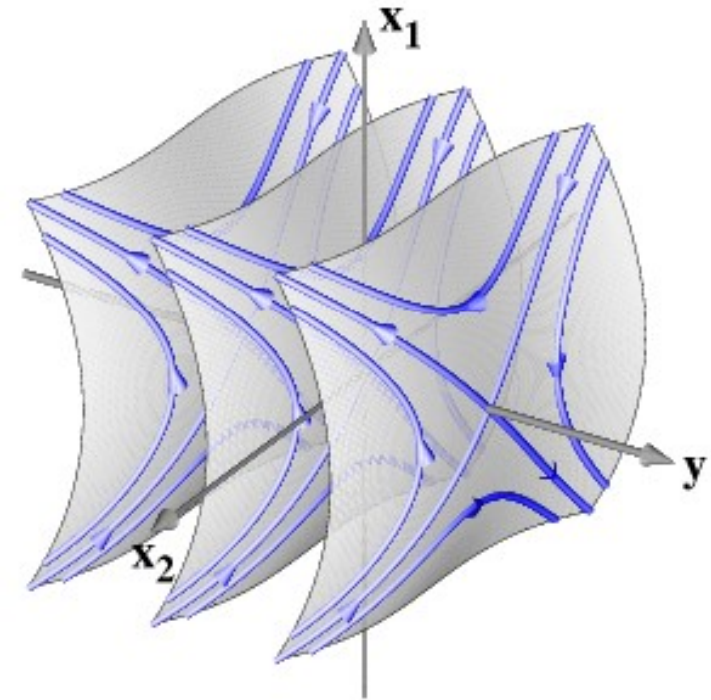
## Гиперболические системы

$$\frac{du}{dt} = F(u), u \in M \subset R^N.$$

или, в разрешенном виде  $u(t) = S(t)(u_0)$ .

Будем считать, что система гладкая. Обозначим

$$dS(t) = S'(t) \big|_{u=u(0)} : R^N \rightarrow R^N.$$



Траектория  $S(t)$  называется равномерно гиперболической, если

$\forall t$  существуют подпространства  $E^S(u(t))$  и  $E^u(u(t))$ ,

непрерывно зависящие от  $u(t)$ , такие что:

$$1. R^N = E^s(u(t)) \oplus E^u(u(t)) \oplus X(u(t))$$

$X(u(t))$  инвариантное подпространство вектора скорости  $F(u(t))$

2. для произвольных  $t, \tau$  пространства инвариантны относительно линейного оператора системы

$$dS(\tau)(E^s(u(t))) = E^s(u(t + \tau)),$$

$$dS(\tau)(E^u(u(t))) = E^u(u(t + \tau)).$$

3. Линейный оператор системы является на них сжатием/растяжением

$$\|dS(t)v\| < C\lambda^t \|v\| \quad v \in E^s(u(0)), 0 < \lambda < 1$$

$$\|dS(-t)w\| < C\lambda^t \|w\| \quad w \in E^u(u(0)).$$

4. Пространства пересекаются с ненулевым углом

$$\gamma(E^s(u(t)), E^u(u(t))) > \gamma_0 > 0.$$

