



ЭМПИРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ПРОГНОЗУ ЭВОЛЮЦИИ КЛИМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

EMPIRICAL APPROACH TO MODELING AND FORECASTING THE EVOLUTION OF CLIMATE SYSTEMS

Александр Фейгин

*Федеральный исследовательский центр
«Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН»*

СОАВТОРЫ:

*Дмитрий Мухин, Евгений Лоскутов, Андрей Гаврилов, Алексей
Селезнев*

*Федеральный исследовательский центр
«Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН»*

Эмпирическая модель:

- **Оператор эволюции** (модель, описывающая изменение состояние системы с течением времени), **построенный путем прямого анализа данных**

**Эмпирическое моделирование
востребовано, если модель «из первых
принципов» отсутствует либо ее динамика
недостаточно адекватна имеющимся
данным наблюдений**

Объекты эмпирического моделирования:

сложные

*(мультимасштабные, нелинейные, высокоразмерные,
пространственно распределенные)*

динамические системы,

подверженные внешним воздействиям различного типа

Примеры сложных систем:

- **климатические системы;**
- астрофизические системы;
 - живые системы;
 - социальные системы;
 - ...

ИДЕЯ РАЗВИВАЕМОГО ПОДХОДА:

*Построение оператора эволюции путем реконструкции
динамики системы
в ее **фазовом пространстве** («пространстве состояний»),
координатами которого являются характеристики (**фазовые
переменные**), определяющие состояние системы в каждый
момент времени*

Ситуация, идеальная для эмпирического моделирования:

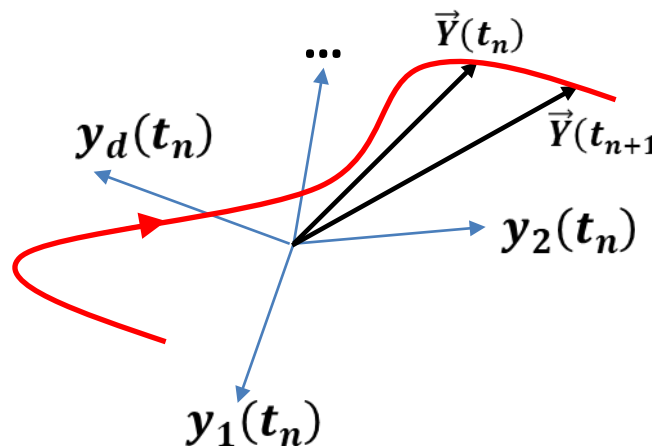
- имеется **полный** набор данных (временных рядов):

$$\vec{Y}(t_n) = \{y_1(t_n), \dots, y_d(t_n)\},$$

описывающих **длительную** («бесконечную») эволюцию **всех** d переменных, определяющих состояние системы **с высоким временным разрешением**



В фазовом пространстве размерности d строим фазовую траекторию и решаем задачу аппроксимации:



$$\vec{Y}(t_{n+1}) = \phi(\vec{Y}(t_n), \vec{\mu})$$

аппроксиматор
(оператор эволюции)

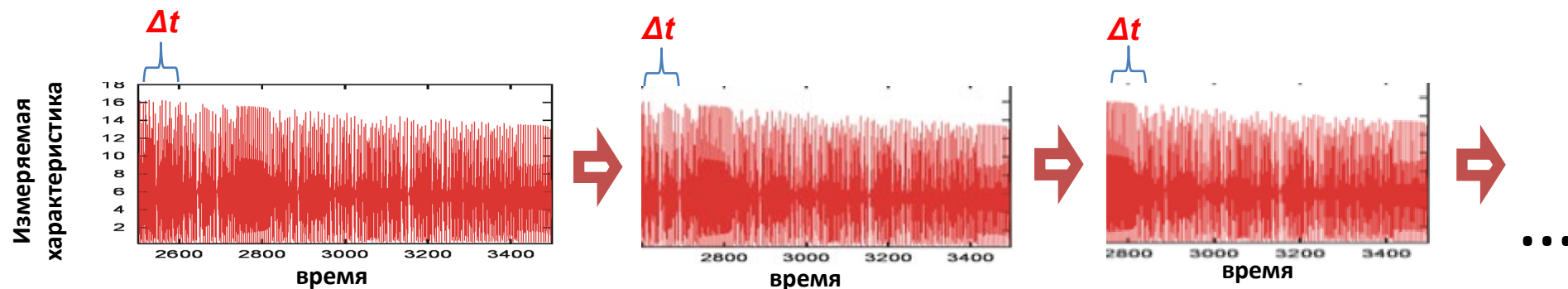
параметры
аппроксимации

Реальность в случае сложных природных систем:

(1) измерены временные ряды малого числа (одной!) переменных !?

Что можно сделать:

*использовать в качестве фазовых координат
«переменные с задержкой» (Takens, 1981)*



$$d_E \geq 2d + 1$$

$$\vec{Y}(t_n) = \{y(t_n), y(t_n + \Delta t), \dots, y(t_n + (d_E - 1)\Delta t)\}$$

Реальность в случае сложных природных систем:

**(2) протяженность временных
рядов конечна**



ОГРАНИЧЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ
РАЗМЕРНОСТИ РЕКОНСТРУИРУЕМОГО
ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА:

$$d_{max} \sim \log\{\text{длина временного ряда}\}$$



СТОХАСТИЗАЦИЯ РЕКОНСТРУИРУЕМОЙ
ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

**(3) временное разрешение
данных конечно**



«БЫСТРАЯ» ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ
ПРИСУТСТВУЕТ В ДАННЫХ В ФОРМЕ
СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА



СТОХАСТИЗАЦИЯ РЕКОНСТРУИРУЕМОЙ
ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Что можно сделать:

Строить модель в форме низкоразмерной *стохастической*
динамической системы (*random dynamical system*)

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ФОРМЕ СЛУЧАЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ:

$$U_{n+1} = \Phi(U_n, \zeta_n),$$

ζ_n - **неизвестный** случайный процесс



$$U_{n+1} = f(U_n) + \eta(U_n, \zeta_n),$$

$f(U) = E[\Phi(U, \zeta)]$ – математическое ожидание по ζ

(«детерминированная» компонента модели);

$\eta(U, \zeta) = \Phi(U, \zeta) - f(U)$ - «случайная» компонента модели.

Факторизация «случайной» компоненты:

$$\eta(U, \zeta) = \hat{g}(U) \cdot \xi(U, \zeta), \quad E[\xi(U, \zeta)] = 0, \quad \text{cov}(\xi(U, \zeta)) = I$$



$$U_{n+1} = f(U_n) + \hat{g}(U_n) \cdot \xi_n,$$

f и $\hat{g}$ - **неизвестные детерминированные функции**, ξ_n - белый гауссов шум

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ФОРМЕ СЛУЧАЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ: УЧЕТ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФАКТОРОВ



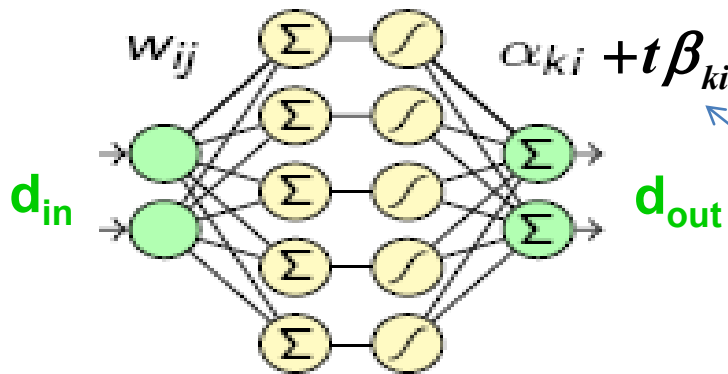
L – глубина памяти модели
 $\mu(t)$ – медленные тренды параметров
 $q(t)$ – внешние воздействия

ПРИМЕР УНИВЕРСАЛЬНОГО АППРОКСИМАТОРА:

Параметризация f и g искусственной нейронной сетью (ANN)

$$ANN_{d_{in}}^{d_{out}}(\mathbf{U}, t) = \left\{ \sum_{i=1}^m (\alpha_{ki} + t\beta_{ki}) \tanh \left(\sum_{j=1}^{d_{in}} w_{ij} U_j + \gamma_i \right) \right\}_{k=1}^{d_{out}}$$

$$f(\mathbf{U}, t, \mu_1) = ANN_{d \times L}^d(\mathbf{U}, t) \quad g(\mathbf{U}, \mu) = ANN_{d \times L}^{d(d+1)/2}(\mathbf{U}, t)$$



Явная зависимость параметров от времени описывает медленные изменения в поведении системы

Два сорта параметров:

«Структурные» или «гипер» параметры («параметры сложности»):

$$s = \{ m_f, m_g, D \}, \quad D = L \times d_{in}$$

Параметры модели заданной сложности:

$$\exists \{ \overline{f}, \overline{g} \} = \{ \overline{\sigma}, \overline{\sigma_f}, \overline{\sigma_g}, \overline{w_f}, \overline{w_g} \}$$

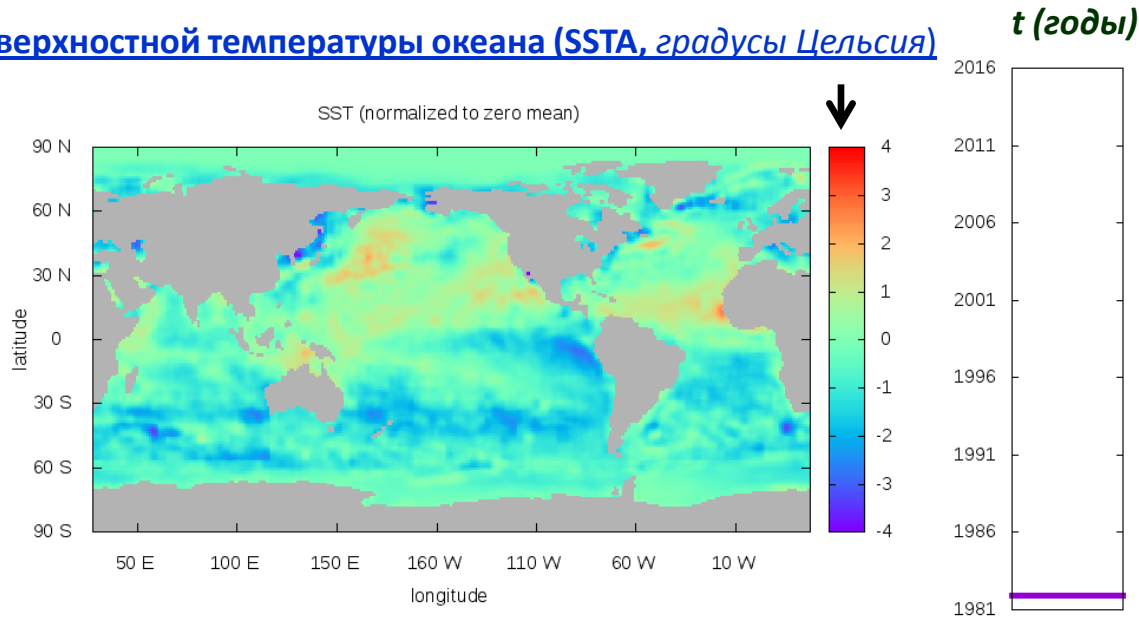
ЕЩЕ ДВЕ ПРОБЛЕМЫ

(4) Высокая размерность пространственно распределенных данных
ПРИМЕР: исследование современной климатической системы

Спутниковые данные: продолжительность ≈ 35 years (число отсчетов $N=396$)

http://iridl.ldeo.columbia.edu/SOURCES/IGOSS/nmc/Reyn_SmithOIv2/monthly/sst/

Аномалии поверхностной температуры океана (SSTA, градусы Цельсия)



Размерность данных (число временных рядов, измеренных в различных пространственных точках): **$D=44219$**

Максимальная размерность эмпирической модели **$d_{max} \sim \log N = 3 !$**



НЕОБХОДИМА ДЕКОМЗИЦИЯ (СНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ) ДАННЫХ

ЕЩЕ ДВЕ ПРОБЛЕМЫ

*(5) Множественность решений задач реконструкции оператора эволюции и декомпозиции данных:
обе задачи являются некорректными обратными*



Необходимы адекватные исследуемой системе
алгоритмы оптимизации и обучения
как при построении модели, так и при декомпозиции данных

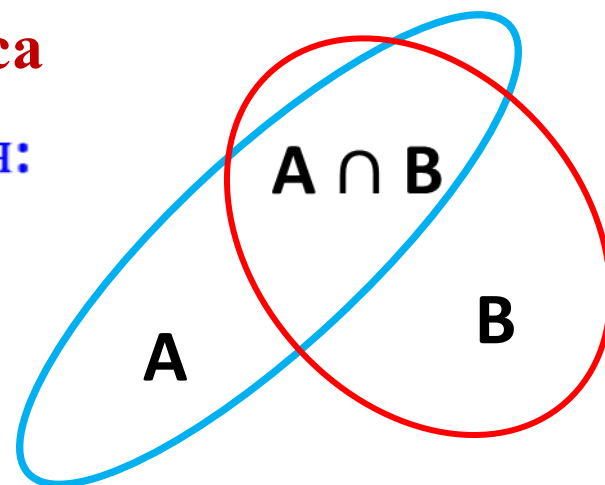


БАЙЕСОВ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

БАЙЕСОВ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Теорема Байеса

A и B – случайные события:



Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{и} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Теорема Байеса:
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

a и b – случайные величины,

$p(a, b)$ – совместная плотность вероятности (п.в.)

Условная п.в.: $p(a|b) = \frac{p(a, b)}{p(b)}$; Теорема Байеса: $p(a|b) = \frac{p(b|a)p(a)}{p(b)}$

Нормировка: $\int p(a|b) da = 1 \rightarrow p(a|b) = \frac{p(b|a)p(a)}{\int p(b|a)p(a)da}$

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

- Пусть $\mathbf{x}$ и θ — переменные некоторой модели $F(\mathbf{x}, \theta, \dots)$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ — наблюдаемые переменные (**данные**)

$\theta \in \mathbb{R}^M$ — ненаблюдаемые переменные (**параметры**)

$p(\mathbf{x}|\theta)$ — “правдоподобие” модели (likelihood)

- Пусть задана **априорная п.в.** $p(\theta)$, описывающая неопределенность выбора параметров модели при отсутствии наблюдений
- Тогда теорема Байеса позволяет вычислить **апостериорную п.в.** параметров (после наблюдений):

$$p(\theta|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)}{\int p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)d\theta}$$

- Точка (или окрестность) максимума $\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\theta|\mathbf{x})$ может быть использована как оценка ненаблюдаемых параметров модели с учетом наблюдений $\mathbf{x}$

Замечание про разделение параметров на две группы:

**«Структурные» параметры («параметры сложности») и
параметры модели заданной сложности**

ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛИ:

отыскание оптимальной модели оптимальной сложности

1. Ценовая функция для сложности модели: байесова обоснованность

$$P(\mathbf{U} | \mathbf{s}) = \iint P(\mathbf{U} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \cdot P(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s}) \cdot d\boldsymbol{\mu} \equiv E(\mathbf{s})$$

Максимум $E(\mathbf{s})$ определяет оптимальное соотношение между качеством воспроизведения данных и прогностической способностью модели

2. Ценовая функция для поиска

оптимальных параметров модели заданной сложности:

ПВ параметров модели $\boldsymbol{\mu}$ при условии данных измерений $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_i \equiv \mathbf{U}(t_i)\}_{i=1}^N, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^d$ и сложности модели $\mathbf{s}$

$$P(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{U}, \mathbf{s}) = P(\mathbf{U} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) P(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s}) / P(\mathbf{U} | \mathbf{s})$$

Модель:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n-1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_1(t_n)) + \mathbf{g}(\mathbf{U}_{n-1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_2(t_n)) \boldsymbol{\xi}_n,$$

$$P_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) \propto \prod_i \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\xi}_i|^2}{2}\right)$$

$$P(\mathbf{U} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \propto \prod_i \left\| \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\mu}_2) \mathbf{g}^T(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\mu}_2) \right\|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{f}(\mathbf{U}_i, t_i, \boldsymbol{\mu}_1))^T \left(\mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\mu}_2) \mathbf{g}^T(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\mu}_2) \right)^{-1} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{f}(\mathbf{U}_i, t_i, \boldsymbol{\mu}_1))\right)$$

АЛГОРИТМ ЭМПИРИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ КЛИМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ:

1. Оптимальная декомпозиции данных (отыскание «модельных переменных»),
учитывающая известные свойства системы максимально доступным образом
2. Построение оптимальной эмпирической модели, описывающей динамику системы в фазовом пространстве модельных переменных
с учетом возможных трендов ее параметров и возможного влияния форсингов на ее эволюцию
3. Идентификация механизмов, определяющих наблюдаемую динамику системы, на основе анализа структуры ее фазового пространства
4. Прогноз эволюции системы, в том числе – прогноз возможных критических переходов

**ВОЗМОЖНАЯ СТЕПЕНЬ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА
ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ИМЕЮЩИМИСЯ ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ**

ЧТО УЖЕ УДАЛОСЬ:

- предложен способ декомпозиции данных ТПО, позволивший описать глобальную изменчивость современного климата **двумя (!) нелинейными динамическими модами;**

Dmitry Mukhin, Andrey Gavrilov, Alexander Feigin, Evgeny Loskutov & Juergen Kurths, 2015: *Nature Scientific Reports*, rep. 5, 15510; <https://doi.org/10.1038/srep15510>.
Gavrilov, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Volodin, A., Feigin, A., & Kurths, J., 2016: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(12), 123101.

- построена **эмпирическая прогностическая модель явления Эль-Ниньо**, включенная в мировой пул моделей, прогнозирующих явление на **внутригодовых масштабах;**

Mukhin, D., E. Loskutov, A. Mukhina, A. Feigin, I. Zaliapin, and M. Ghil, 2015: *Journal of Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1940-1961.
Mukhin, D. Kondrashov, E. Loskutov, A. Gavrilov, A. Feigin, M. Ghil, 2015: *Journal of Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1962-1976.
Gavrilov, A., Seleznev, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2019: *Climate Dynamics*, 52(3–4), 2199–2216.

- показано, что эмпирическая модель явления Эль-Ниньо, построенная по данным температуры поверхности океана и его теплосодержания, **позволяет преодолеть весенний барьер предсказуемости явления;**
- исследована **роль нелинейности в динамике явления Эль-Ниньо на разных временных масштабах** (внутригодовых, межгодовых, декадных).

Показано, в том числе, что межгодовая динамика перешла от линейной в начале 20 века к нелинейной в современном климате;

ЧТО УЖЕ УДАЛОСЬ:

- на основе данных содержания изотопа ^{18}O продолжительностью 2.6 млн лет построена эмпирическая модель климата плейстоцена, позволившая, в частности, расшифровать **механизм критического перехода среднего плейстоцена**, изменившего количественно и качественно динамику ледниковых циклов;

Mukhin, D., Gavrilov, A., Loskutov, E., Kurths, J., & Feigin, A., 2019. *Nature Scientific Reports*, 2019 9:1, 9(1), 7328. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-43867-3>.
E. Loskutov, V.Vdovin, V. Klinshov, A.Gavrilov, D.Mukhin, A.Feigin, 2022. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 32, 021103, <https://doi.org/10.1063/5.0079963>

- разработан и эффективно применяется **алгоритм верификации климатических моделей «из первых принципов»**, используемых, в том числе, для прогноза изменений климата в XXI веке;

S. Kravtsov, Andrew Westgate, A. Gavrilov: *Climate Dynamics*, 2024, vol. 62, P. 10281-10306 <https://doi.org/10.1007/s00382-024-07451-4>

A.Selezne D. Mukhin, A. Gavrilov, A. Gritsun : *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2024, vol. 39, № 1, P. 35-46 <https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0004>

R.Samoilov, D. Mukhin, S. Safonov et al.: *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2025, vol. 40, № 2, P. 141-152 <https://doi.org/10.1515/rnam-2025-0011>

M. Buyanova, D. Mukhin, A. Gavrilov: *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2025, vol. 40, № 2, P. 91-106 <https://doi.org/10.1515/rnam-2025-0008>

- разработан **алгоритм выделения в наблюдаемой динамике климатической системы отклика на внешние форсинги**, включенный в европейский проект **Forced Component Estimation Statistical Method Intercomparison Project (ForceSMIP)**, выполняемый в настоящее время

Gavrilov A., S. Kravtsov, M. Buyanova, D. Mukhin, E. Loskutov, A.Feigin: *Climate Dynamics*, 2024, vol. 62, P. 1783-1810 <https://doi.org/10.1007/s00382-023-06995-1>

R.C. J. Wills, A. Feigin, A. Gavrilov et al.: *Journal of Climate* — 2026. <https://doi.org/10.1175/JCLI-D-25-0326.1>

Мухин Д.Н., Фейгин А.М., Самойлов Р.С., Сафонов С.Е.

Подход к исследованию режимов циркуляции атмосферы и дальних связей на основе скрытых марковских моделей

Селезнев А.Ф., Буянова М.Н., Гаврилов А.С., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М.

Идентификация и анализ главных мод климатической изменчивости по ансамблям реализаций моделей Земной системы

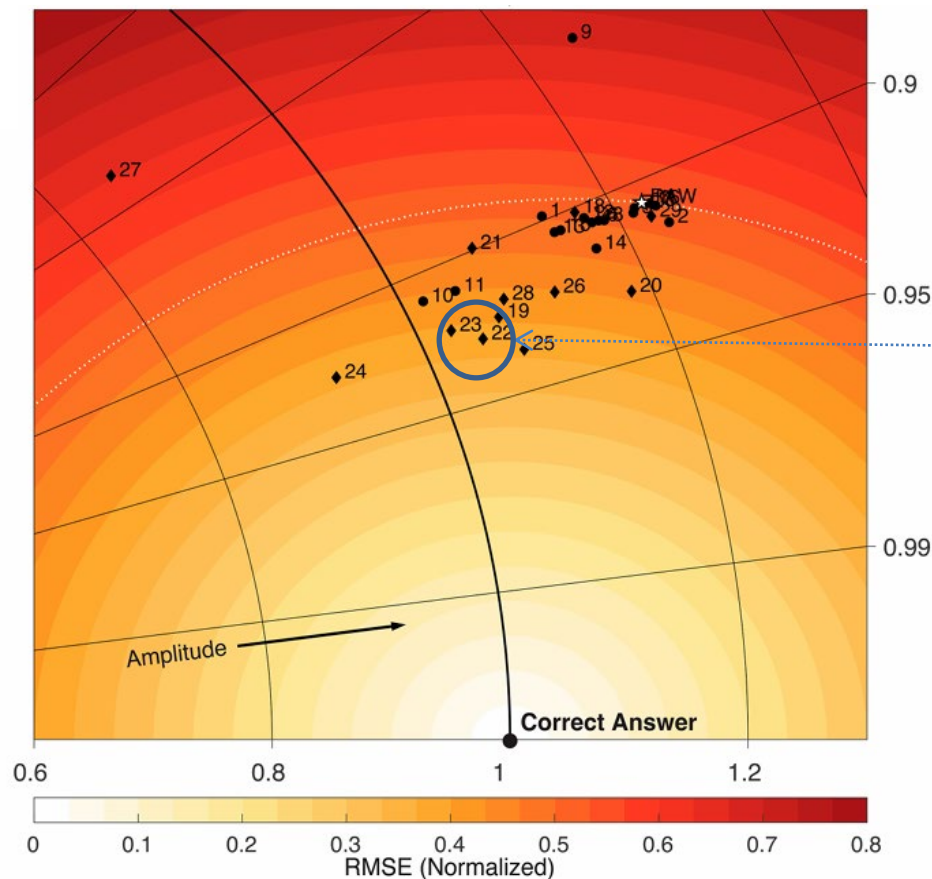
Лоскутов Е.М., Мурзина П.А., Мухин Д.Н., Сафонов С.Е.

Метод эмпирического анализа дальних связей в климатической системе Земли

СПАСИБО!

1. Фейгин А.М., Мольков Я.И., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., 2001: Прогноз качественного поведения динамической системы по хаотическому временному ряду. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, т.44, №5-6, с.376-399;
2. Feigin A.M., Molkov Y.I., Mukhin D.N., and Loskutov E.M., 2002 : Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of the dynamical models of atmospheric photochemical systems. *Faraday Discussions*, Vol.120, p.105-123;
3. Mukhin D.N., Feigin A.M., Loskutov E.M., and Molkov Y.I., 2006: Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Phys. Rev. E*, Vol.73, 036211.
4. E.M. Loskutov, Ya.I. Molkov, D.N. Mukhin, A.M. Feigin, 2008: Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 77, 066214.
5. Molkov, Ya.I., D.N. Mukhin, E.M. Loskutov, A.M. Feigin, and G.A. Fidelin, 2009: Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 80, 046207.
6. Y. I. Molkov, D. N. Mukhin, E. M. Loskutov, R. I. Timushev, A.M. Feigin, 2011: Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 84, 36215.
7. Ya. I. Molkov, D. N. Mukhin, E. M. Loskutov, A.M. Feigin, 2012 : Random dynamical models from time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 85, n.3.
8. Mukhin, D., E. Loskutov, A. Mukhina, A. Feigin, I. Zaliapin, and M. Ghil, 2015: Predicting critical transitions in ENSO models, Part I: Methodology and simple models with memory. *Journal of Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1940-1961.
9. D. Mukhin, D. Kondrashov, E. Loskutov, A. Gavrilov, A. Feigin, M. Ghil, 2015: Predicting critical transitions in ENSO models, Part II: Spatially dependent models. *Journal of Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1962-1976.
10. Dmitry Mukhin, Andrey Gavrilov, Alexander Feigin, Evgeny Loskutov & Juergen Kurths, 2015: Principal nonlinear dynamical modes of climate variability. *Nature Scientific Reports*, rep. 5, 15510; <https://doi.org/10.1038/srep15510>.
11. Gavrilov, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Volodin, A., Feigin, A., & Kurths, J., 2016. Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(12), 123101.
12. Mukhin, D., Gavrilov, A., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2018. Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales. *Climate Dynamics*, 51(5–6), 2301–2310.
13. Селезнев А.Ф., Гаврилов А.С., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М., 2018. Моделирование сложных систем по наблюдаемым данным на основе рекуррентных искусственных нейронных сетей. *Изв. вузов. Радиофизика*. Т. 61, № 12. С. 1005–1021.
14. Gavrilov, A., Seleznev, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2019. Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast. *Climate Dynamics*, 52(3–4), 2199–2216.
15. Mukhin, D., Gavrilov, A., Loskutov, E., Kurths, J., & Feigin, A., 2019. Bayesian Data Analysis for Revealing Causes of the Middle Pleistocene Transition. *Nature Scientific Reports*, 2019 9:1, 9(1), 7328. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-43867-3>.
16. A.Seleznev, D.Mukhin, A.Gavrilov, E.Loskutov, 2019. Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29, 123115, <https://doi.org/10.1063/1.5128372>
17. Mukhin Dmitry, Gavrilov Andrey, Seleznev Aleksei, Buyanova Maria An Atmospheric Signal Lowering the Spring Predictability Barrier in Statistical ENSO Forecasts // *Geophysical Research Letters*, 2021. — Vol. 48, no. 6. — Pp. 1–10, <https://doi.org/10.1029/2020GL091287>
18. Мухин Д. Н. Селезнев А. Ф. Гаврилов А. С. Фейгин А. М. Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата // *Известия ВУЗов. Изв. вузов. - Прикладная нелинейная динамика*. 2021, т.29, №4. с. 571–602.
19. Seleznev Aleksei, Mukhin Dmitry. Improving statistical prediction and revealing nonlinearity of ENSO using observations of ocean heat content in the tropical Pacific // *Climate Dynamics*. — 2021. — <https://doi.org/10.1007/s00382-022-06298-x>
20. A. Gavrilov, E. Loskutov, A. Feigin, 2022. Data-driven stochastic model for cross-interacting processes with different time scales. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32, 023111, <https://doi.org/10.1063/5.0077302>
21. E. Loskutov, V.Vdovin, V. Klinshov, A.Gavrilov, D.Mukhin, A.Feigin, 2022. Applying interval stability concept to empirical model of middle Pleistocene transition. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32, 021103, <https://doi.org/10.1063/5.0079963>
22. D. Mukhin, S. Kravtsov, A. Seleznev, E. Loskutov, M. Buyanova, A.Feigin, Estimating predictability of a dynamical system from multiple samples of its evolution. — *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2023, vol. 33, № 1, P. 011103 <https://doi.org/10.1063/5.0135506>
23. D. Mukhin, S. Safonov, A. Gavrilov, A. Gritsun, A new tool for studying seasonality and spatio-temporal structure of ENSO cycles in data and ESM simulations. — *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2024, vol. 39, № 1, P. 27-34 <https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0003>
24. A.Seleznev D. Mukhin, A. Gavrilov, A. Gritsun, ENSO phase locking, asymmetry and predictability in the INMCM Earth system model. — *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2024, vol. 39, № 1, P. 35-46 <https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0004>
25. Gavrilov A., S. Kravtsov, M. Buyanova, D. Mukhin, E. Loskutov, A.Feigin, Forced response and internal variability in ensembles of climate simulations: identification and analysis using linear dynamical mode decomposition. — *Climate Dynamics*, 2024, vol. 62, P. 1783-1810 <https://doi.org/10.1007/s00382-023-06995-1>
26. S. Kravtsov, Andrew Westgate, A. Gavrilov, Global-scale multidecadal variability in climate models and observations, part II: The stadium wave. — *Climate Dynamics*, 2024, vol. 62, P. 10281-10306 <https://doi.org/10.1007/s00382-024-07451-4>
27. M. Buyanova, D. Mukhin, A. Gavrilov, Analysis of forced response and internal climate variability in the INMCM Earth system model. — *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2025, vol. 40, № 2, P. 91-106 <https://doi.org/10.1515/rnam-2025-0008>
28. D. Mukhin, R.Samoilov, A.Hannachi, Metastability and teleconnection of atmospheric circulation via hidden Markov models and network modularity. — *Nature Scientific Reports*, 2025, vol. 15, P. 34095 <https://doi.org/10.1038/s41598-025-14696-4>
29. R.Samoilov, D. Mukhin, S. Safonov, A. Gavrilov, A. Gritsun, S. Safonov, E. Loskutov, A.Mukhina, A. Gritsun, Reproducibility of atmospheric circulation regimes over the winter Northern Hemisphere by the INMCM5 Earth system model. — *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2025, vol. 40, № 2, P. 141-152 <https://doi.org/10.1515/rnam-2025-0011>
30. A. Hannachi, M. Lechner, K. Finke, D. Mukhin, Stratospheric polar vortex, wave absorption/reflection and effect on surface climate. — *Climate Dynamics*, 2025, vol. 63, P. 126 <https://doi.org/10.1007/s00382-025-07610-1>
31. R.C. J. Wills et al., Forced Component Estimation Statistical Method Intercomparison Project (ForceSMIP), *Journal of Climate* — 2026. <https://doi.org/10.1175/JCLI-D-25-0326.1>

Участие в международном тестировании методов выделения в наблюдаемой динамике климатической системы отклика на внешние форсинги (проект *forcesmp*): результаты первого этапа



Модели ИПФ РАН
(№№22,23)

Taylor diagram showing RMSE normalized by the root-mean-square amplitude of the ensemble mean (colors), the root-mean-square amplitude normalized by the root-mean-square amplitude of the ensemble mean, i.e., s_i/s_{REF} (black arcs), and the uncentered pattern correlation r_i (black rays).