

Аппроксимация системы законов сохранения для газа, стратифицированного полем тяжести; функция Ляпунова и устойчивость

Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М., Закиров
М.Н.

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
Калининградский филиал Института Земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, Калининград,
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва

8 апреля 2026 г.

Пример расчетов с суперкомпьютерной программой AtmoSym

Диссипация учитывается

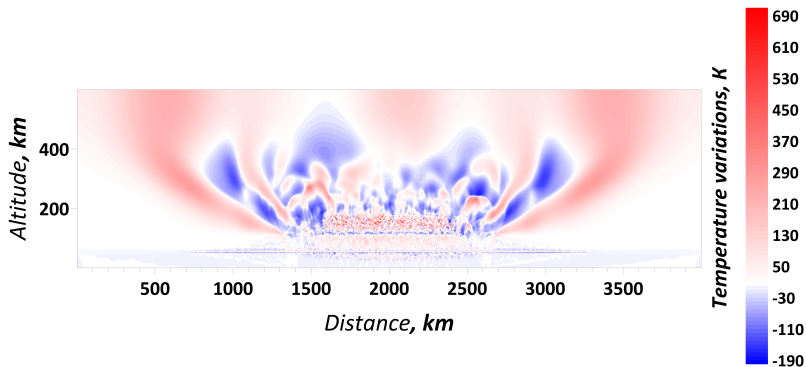


Рис.: Численное моделирование температурных возмущений, вызванных акустическими и внутренними гравитационными волнами во время землетрясений (предварительные расчеты).

Пример численных расчетов с программой AtmoSym на основе построенной теории. Диссипация учитывается

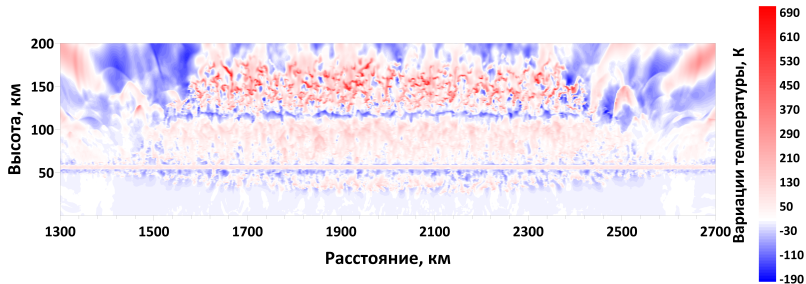


Рис.: Численное моделирование температурных возмущений, вызванных акустическими и внутренними гравитационными волнами во время землетрясений (предварительные расчеты).

Некоторые существующие популярные модели атмосферных процессов

- Мезомасштабной модель WRF (Weather Research and Forecasting) считается передовой системой численного прогнозирования погоды и используется для атмосферных исследований и оперативных прогнозов. Отличается широким диапазоном масштабов: от десятков метров до тысяч километров. Создана ведущими американскими центрами, включая NCAR, NOAA, BBC США и др.
- Российская модель БАРС (Блочная Адаптивная Региональная Система, ИВМ РАН им. Г.И. Марчука)
- Модели ICON-LAM/COSMO Германия/Россия)
- Модель MPAS (США)

И так далее. Во всех этих моделях имеются общие проблемы, происходящие от фундаментальных проблем в математической теории гидродинамических уравнений. Эти проблемы ниже обсуждаются.

Ниже изучаются недиссипативные уравнения. Почему?

- ① Хорошо известно, до высоты примерно 100 км влиянием вязкости и теплопроводности на распространение ВГВ обычно можно пренебречь (Gossard and Hooke, 1975), (Dikii, 1969).
- ② Молекулярные вязкость и теплопроводность влияют на численное решение, только если пространственный шаг h численной схемы достаточно мал и удовлетворяет следующим условиям:
 - $h \lesssim 0.12$ м для ВГВ у поверхности Земли,
 - $h \lesssim 2.2$ м для ВГВ на высоте 40 км,
 - $h \lesssim 22$ м для ВГВ на высоте 80 км,
- ③ Реальные шаги сетки в современных численных моделях с высоким разрешением сейчас обычно:
 - $h \gtrsim 100$ м — 1 км по вертикали
 - $h \gtrsim 500$ м — 10 км по горизонтальным переменным.

Это на несколько порядков больше шагов, при которых диссипация корректно учитывается численной моделью.

Ниже изучаются недиссипативные уравнения. Почему?

Внизу, у поверхности Земли, имеются турбулентные вязкость и теплопроводность. Оценки показывают, что эти физические процессы влияют на численное решение, если выполнены условия

- $h \lesssim 60$ м для ВГВ у поверхности Земли
- $h \lesssim 20$ м для ВГВ в стратосфере (40 км для примера)
- $h \lesssim 500$ м для ВГВ на (80-100 км)

Вывод. Пространственные шаги моделей обычно значительно больше необходимых для корректного учета турбулентной вязкости и теплопроводности. В WRF шаг в поверхностном слое сгущается до 10 м, и внизу турбулентная вязкость учитывается корректно. Но зато выше турбулентности практически нет, - и проблема.

При используемых типичных шагах в численных схемах, учет диссипации не влияет на численные результаты, за исключением приповерхностного слоя.

Гидродинамические уравнения для недиссипативного газа в поле тяжести

Для недиссипативного идеального газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, & \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla(\rho e \vec{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность; $p = \frac{\rho R T}{\mu}$ — давление;

$e = \left(\frac{u^2 + w^2}{2} + gz + \frac{c_v T}{\mu} \right)$ — удельная энергия; T — температура;

R — универсальная газовая постоянная; c_v — теплоемкость на

киломоляр; μ — молекулярный вес; u — горизонтальная
массовая скорость; w — вертикальная массовая скорость

жидкости; t — время; x, z — горизонтальная и вертикальная
координаты; g — ускорение свободного падения. (Уравнения

сохранения массы и движения - 1757 г Эйлер; Уравнение для
внутренней энергии добавил Рудольф Клаузиус в 1850 году.)

Область, в которой рассматриваются уравнения. Граничные условия и стратификация

Уравнения (1) для двух пространственных измерений. Случай трех измерений аналогичен.

Для упрощения атмосфера изотермическая, то есть, температура T_0 атмосферы не зависит от высоты. Тогда плотность газа стратифицирована экспоненциально:

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad H = \frac{RT_0}{g\mu}.$$

Реальная атмосфера Земли до высоты 80км близка к изотермической, $H \approx 8\text{км}$.

Уравнения рассматриваются в прямоугольной области Ω .

Нижняя граница области Ω находится на поверхности земли.

Граничные условия

$$(\vec{v}, \vec{n}) = 0 \tag{2}$$

на границе $\partial\Omega$ области Ω , где $\vec{v} = (u, w)$ и $\vec{n}$ — нормаль к границе

Известная математическая проблема. Отсутствие решений (классических) недиссипативных гидродинамических уравнений (1) на больших временах!

- Уравнения исследованы в (Rozhdestvenskii and Yanenko, 1978), (Kato, 1975), (Majda, 1984). Динамические гладкие решения существуют лишь конечное время, если только начальные данные не являются тривиальными константами или специальными условиями типа разрежения.
- Начиная с какого-то времени, динамическое решение перестает быть дифференцируемым, и на больших временах гладкие решения недиссипативных гидродинамических уравнений (1) не существуют практически всегда.
- Вопрос не сводится к волнам с разрывами. Могут быть непрерывные, но недифференцируемые волновые поля.

Тонкие структуры, как экспериментально наблюдаемые недифференцируемые волновые поля

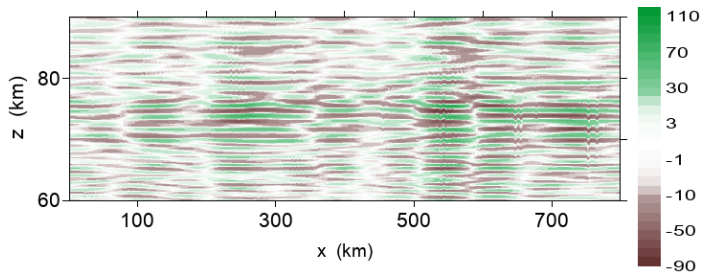


Рис.: Фрагмент поля горизонтальной скорости в тонкой структуре. Непрерывное по z , но не дифференцируемое по z ни в одной точке поле горизонтальной скорости. Численное моделирование.

Расширение понятия решения, обобщенные/слабые решения уравнений Эйлера

Необходимо отремонтировать недиссипативные гидродинамические уравнения (1). С этой целью:

- Piter Lax предложил концепцию **слабого/обобщенного** решения (Lax, 1954, 1957). **Слабое решение удовлетворяет не дифференциальным, а интегральным уравнениям.**
- Обычные решения, пока они есть, тоже удовлетворяют понятию слабого решения.
- **Определение** слабых решений **основано на интегральных законах сохранения массы, импульса и энергии.**
- Существуют различные формулировки слабых решений, но наиболее популярна формулировка Питера Лакса. Ее рассмотрим ниже.

Стандартное определение Лакса слабых решений

Перепишем систему уравнений (1), в матричной форме

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f_x(r)}{\partial x} + \frac{\partial f_z(r)}{\partial z} = q, \quad (3)$$

где столбец $r = (\rho, \rho u, \rho w, \rho e)^T$, столбцы

$$f_x(r) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uw, (\rho e + p)u)^T,$$

$$f_z(r) = (\rho w, \rho uw, \rho w^2 + p, (\rho e + p)w)^T, \quad q = (0, 0, -\rho g, 0)^T.$$

Стандартным способом строятся интегральные соотношения :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r_s(x, z, 0) r(x, z, 0) d\Omega - \int_{Q_{t_0}} \left(r \frac{\partial r_s}{\partial t} + f_x(r) \frac{\partial r_s}{\partial x} + f_y(r) \frac{\partial r_s}{\partial z} \right) dQ_{t_0} = \\ = \int_{Q_{t_0}} r_s q dQ_{t_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Ω – пространственная область, где рассматриваются уравнения, и $Q_{t_0} = \Omega \times [0, t_0]$, $0 \leq t \leq t_0 > 0$. Можно $t_0 = \infty$.

Стандартное определение слабых решений по Лаксу (Richtmyer, 1982)

Предполагается также, что функции r_s гладкие:

$$r_s(x, z, t) = (s_1(x, z, t), s_2(x, z, t), s_3(x, z, t), s_4(x, z, t)), \\ r_s(x, z, t) \in C^1(\Omega) \otimes C^1[0, t_0], \quad r_s(x, z, t_0) = 0.$$

Уравнение (4) получается так. Уравнение-столбец (3)

умножается на строку r_s слева. Затем выполняется интегрирование по частям в интегралах, в предположении, что интегрирование по частям допустимо.

Затем система дифференциальных уравнений Эйлера (3) выбрасывается.

Наоборот, новое уравнение (4) объявляется истинно верным, правильным.

Решение-столбец интегрального уравнения (4) называют слабым решением уравнений (3) в англоязычной литературе, и обобщенным решением в русской литературе.

Общеизвестные проблемы теории слабых решений уравнений недиссипативной гидродинамики

Еще Лакс указал, что введенных им условий недостаточно. Как минимум, необходимо добавить к (4) требование неубывания энтропии. Иначе определяемое слабое решение неустойчиво и неединственно.

Сейчас известно. В случае двух и трех пространственных измерений нет единственности решений!

Обратимся к опыту, в котором все понятно. В теории линеаризованных гидродинамических невязких уравнений нет этих проблем с единственностью решения, устойчивостью. Или эти проблемы давно решены.

Линеаризованные уравнения для волн малых амплитуд

Вследствие большой плотности газа у поверхности Земли, амплитуда волн у поверхности обычно мала, и часто оправдано использование линеаризованных уравнений:

$$\begin{aligned}(\rho_0 \Psi)_t + (\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z &= 0, \\ (\rho_0 u)_t + \rho_0 g H (\Psi + \Phi)_x &= 0, \\ (\rho_0 w)_t + (\rho_0 g H (\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi &= 0, \\ (\rho_0 \Phi)_t + (\gamma - 1) ((\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w &= 0,\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\Psi = \frac{\rho(x,z,t) - \rho_0(z)}{\rho_0(z)}$, $\Phi = \frac{T(x,z,t) - T_0(z)}{T_0(z)}$,
 $\alpha = \left(\gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} \right).$

Уравнения (5), кроме волновых, имеет стационарные решения, которые можно отождествить с ветром. В рассматриваемом приближении взаимодействие волн с ветром отсутствует. Мы предполагаем отсутствие ветра.

Функционал волновой энергии и корректность линеаризованной задачи

Квадратичный закон сохранения волновой энергии для уравнений (5) имеет вид ((Gossard and Hooke, 1975))

$$\frac{dH_{lin}}{dt} = 0 \quad (6)$$

$$H_{lin} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \left[\frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{gH}{2\gamma} (\Phi + \Psi)^2 + \frac{gH}{2\gamma\alpha} (\Phi - (\gamma - 1)\Psi)^2 \right] d\Omega.$$

Из (6) следует устойчивость и единственность решения. Негладкие, слабые решения тоже определяются с помощью функционала (6) волновой энергии.

Именно функционал (6) помог решить вопрос о единственности, устойчивости и даже о существовании решений в линейной теории.

Общий функционал волновой энергии для нелинейных ...

Учитывая **важнейшее** значение функционала волновой энергии в линейной теории, попытаемся угадать аналогичный функционал для нелинейных уравнений.

Theorem

Пусть решение уравнений (1) гладкое. Тогда функционал

$$H_{nonl} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho g z + \frac{c_V \rho T}{\mu} \right. \quad (7)$$

$$\left. - \frac{c_V \rho T_0}{\mu} \left(\gamma + \ln \frac{T}{T_0} - (\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0(0)} \right) + \frac{c_V \rho_0(z) T_0}{\mu} (\gamma - 1) \right] dx dz$$

сохраняется на решениях. Подынтегральное выражение в (7) неотрицательное при $\rho \geq 0$. В пределе волн малых амплитуд функционал (7) переходит в функционал (6) волновой энергии из линейной теории волн.

Обобщение на случай недифференцируемых решений

Гладких решений на больших временах нет!. Поэтому обобщаем (7) на случай негладких решений.

- Из физического смысла, требуем сохранения массы, гидродинамической энергии.
- Функционал энтропии $\int_{\Omega} \frac{c_V \rho}{\mu} (\ln T - (\gamma - 1) \ln \rho) d\Omega$ может не сохраняться. Постулируем

$$\frac{dH_{nonl}}{dt} \leq 0. \quad (8)$$

Знак " $\leq$ " выбран потому, что противоположный знак " $>$ " в (8) противоречит второму закону термодинамики о неубывании энтропии. и означает неустойчивость.

- 1 (8) является необходимым условием существования, единственности и устойчивости решений. То есть, неубывание энтропии для приближенного решения очень важно.

Слабые решения. Необходимые дополнительные требования к интегральным уравнениям.

- ① Из (8) и второго закона термодинамики следует (Prigogine and Kondepudi, 2002; Prigogine, 1967)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla(\rho s \vec{v}) = \nu, \quad \nu \geq 0. \quad (9)$$

Это уравнение для изменения энтропии, **и принцип неотрицательности производства энтропии $\nu \geq 0$ выписан справа.**

- ② Поскольку атмосферные процессы медленные, квазистационарные, с точки зрения неравновесной термодинамики, то к ним применим принцип минимума производства энтропии Пригожина, который утверждает, что **физические процессы ведут себя так, чтобы ν было минимальным, при условии $\nu \geq 0$.**

Ключевой вопрос

Требуется одновременно удовлетворить

- 1 уравнениям недиссипативной гидродинамики в интегральной форме (для слабых решений)
- 2 второму закону термодинамики в локальной форме (локальное производство энтропии $\nu \geq 0$)
- 3 требованию минимума локального производства энтропии ν , при условии $\nu \geq 0$

Все условия абсолютно необходимы. Но их нужно как-то совместить.

Возможно ли это?

Будем выяснять...

Численный метод. Шахматная разностная сетка.

Дифференциальная по времени t и конечно–разностная по пространственным переменным аппроксимация гидродинамических уравнений производится на шаблоне.

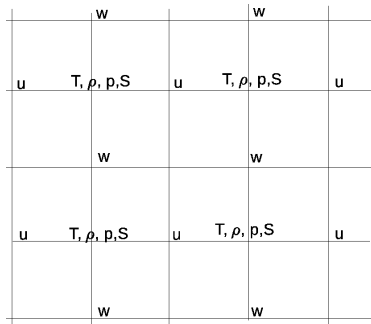


Рис.: Разнесенная сетка «крест» для численного решения уравнений. T, ρ, p, s определены, в узлах с четными индексами i, k ; u определена между узлами сетки с (T, ρ, p, s) , в узлах с нечетным i ; w определена между узлами с (T, ρ, p, s) , в узлах с

Результат исследования. Важные леммы для численного решения

Построены аппроксимирующие дифференциально-разностные уравнения. Их здесь не выписываем, ибо они громоздкие. Для численного решения справедливы утверждения:

Лемма

Если $\rho_{i,k}(0) > 0$, то $\rho_{i,k}(t) > 0$. (положительность плотности)

Лемма

Если $T_{i,k}(0) > 0$, $T_{i,k}(t) > 0$. (положительность температуры)

Лемма

Выполняется сеточный аналог закона сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} \left(4h^2 \sum_{\Omega} \rho_{i,k} \right) = 0. \quad (10)$$

Результат исследования. Важные леммы

Lemma

При $g = 0$ выполняется закон сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(4h^2 \sum_{\Omega} \frac{\rho_{i,k} + \rho_{i+2,k}}{2} u_{i+1,k} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(4h^2 \sum_{\Omega} \frac{\rho_{i,k+2} + \rho_{i,k}}{2} w_{i,k+1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Lemma

Выполняется сеточный аналог закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(4h^2 \left(\sum_{\Omega} \frac{\rho_{i+2,k} + \rho_{i,k}}{2} (u_{i+1,k})^2 + \sum_{\Omega} \frac{\rho_{i,k+2} + \rho_{i,k}}{2} (w_{i,k+1})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum \rho_{i,k} g z_k + \sum \frac{c_V}{\gamma} \rho_{i,k} T_{i,k} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Результат исследования. Важные леммы

Lemma

Выполняется закон неубывания энтропии

$$\frac{d}{dt} \left[4h^2 \sum_{\Omega} \frac{c_v}{\mu} \rho_{i,k} (\ln(T_{i,k}) - (\gamma - 1) \ln(\rho_{i,k})) \right] \geq 0. \quad (13)$$

Lemma

На гладких решениях энтропия приближенно сохраняется:

$$\frac{d}{dt} \left[4h^2 \sum \frac{c_v}{\mu} \rho_{i,k} (\ln(T_{i,k}) - (\gamma - 1) \ln(\rho_{i,k})) \right] = O(h^2). \quad (14)$$

Результат. Функции Ляпунова для аппроксимирующих уравнений

Theorem

Решение аппроксимирующих дифференциально-разностных уравнений существует и устойчиво для всех $t > 0$ при $\rho_{i,k}(t=0) > 0$, $T_{i,k}(t=0) > 0$, $\tilde{H}_{nonl}(t=0) < \infty$.

Справедливо $\frac{d\tilde{H}_{nonl}}{dt} \leq 0$, где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{nonl} = & 4h^2 \left(\left(\sum_{\Omega} \frac{\rho_{i,k} + \rho_{i+2,k}}{2} \frac{u_{i+1,k}^2}{2} + \sum_{\Omega} \frac{\rho_{i,k} + \rho_{i,k+2}}{2} \frac{w_{i,k+1}^2}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\Omega} g \rho_{i,k} z_k \right) + \frac{c_V}{\mu} \left(\sum_{\Omega} \rho_{i,k} T_{i,k} - \sum_{\Omega} \rho_{i,k} T_0 \left(\gamma - \ln \left(\frac{T_{i,k}}{T_0} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (\gamma - 1) \ln \left(\frac{\rho_{i,k}}{\rho_0(0)} \right) \right) \right) + \sum_{\Omega} \rho_0(z_k) T_0 (\gamma - 1) \right) \geq 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Результат. Это функция Ляпунова для системы аппроксимирующих дифференциально-разностных уравнений

В (15) суммы по внутренним четным узлам сетки, i, k – четные.

$\tilde{H}_{nonl}$ — дискретный аналог волновой энергии H_{nonl} .

Замечание

Функция H_{nonl} в (15) является функцией Ляпунова для системы аппроксимирующих дифференциально-разностных уравнений. Метод исследования устойчивости систем дифференциальных уравнений на основе функций Ляпунова широко известен и изложен в (Lyapunov, 1950), (Malkin, 1966).

Численный метод - суперкомпьютерная программа AtmoSym - на основе построенной теории. Диссипация учитывается

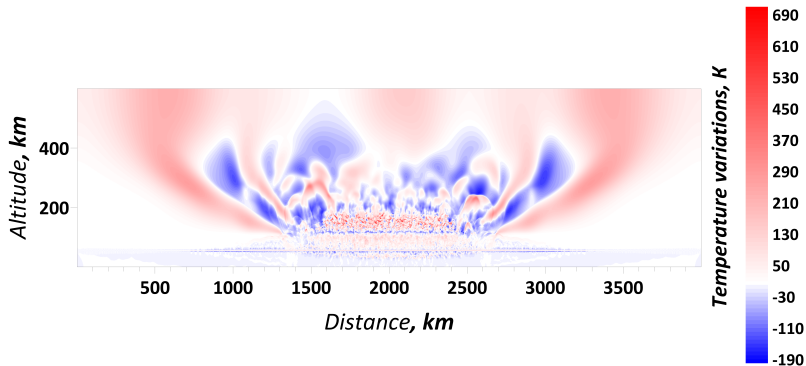


Рис.: Численное моделирование температурных возмущений, вызванных акустическими и внутренними гравитационными волнами во время землетрясений (предварительные расчеты).

Численный метод - программа AtmoSym -на основе теории. Диссипация учитывается

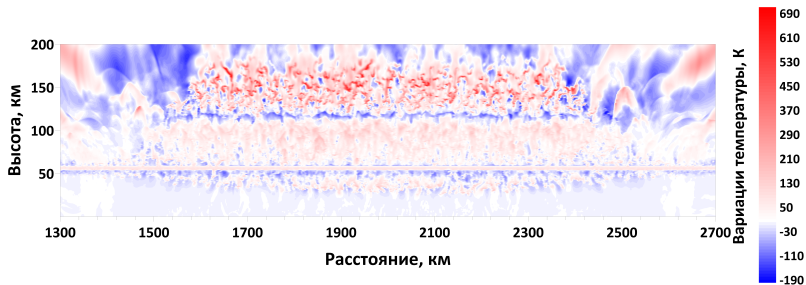


Рис.: Численное моделирование температурных возмущений, вызванных акустическими и внутренними гравитационными волнами во время землетрясений (предварительные расчеты).

Численный метод - программа AtmoSym - на основе теории. Диссипация учитывается

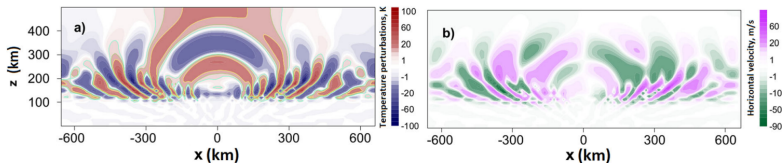


Рис.: Численное моделирование возмущений температуры (а) и горизонтальной скорости (б) в вертикальной плоскости, вызванных акустическими и внутренними гравитационными волнами от тропосферных метеорологических источников (из (Kshevetskii et al., 2020))..

Основные результаты. Итоги

- 1 Теоретически, математически, нижняя атмосфера до 100 км – самая проблемная область. Выше уравнения проще.
- 2 Классическое, гладкое решение уравнений существует только до некоторого конечного t_0 , и мы вынуждены строить слабое (обобщенное) решение. А оно неединственно. В теории слабых решений есть проблемы.
- 3 Гидродинамических уравнений недостаточно для корректной задачи. Эти уравнения необходимо дополнить требованиями неотрицательности локального производства энтропии и минимума производства энтропии.
- 4 Тогда у аппроксимирующих уравнений существует функция Ляпунова, и приближенное решение существует и устойчиво и единственно для любого $t > 0$.
- 5 Представлена программа AtmoSym, основанную с помощью функции Ляпунова.

Большое спасибо за
внимание!

Примечание

- ❶ Доказательства теорем очень громоздкие. Выполнить их вручную, с помощью ручки и бумаги, долго и сложно. Поэтому при выполнении доказательств использован математический робот (искусственный интеллект). У него от сложных громоздких формул голова не болит. Его не жалко.
- ❷ Программирование, распараллеливание вычислений выполнено с помощью робота (искусственного интеллекта). Можно запрограммировать все вручную, без интеллекта. Но жизнь радостной не будет. Абсолютно. Это несколько лет утомительной однообразной работы.
- ❸ Про волны от землетрясений. Ответ на больших временах сильно зависит от деталей, на которые часто не обращают внимания. Например, есть ли окончательное смещение земной коры, и какова площадь. Даже небольшое окончательное смещение очень влияет на волны в атмосфере

Литература I

- Chunchuzov, I. P. (2002). On the high-wavenumber form of the Eulerian internal wave spectrum in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 59:1753–1772.
- Chunchuzov, I. P. (2009). On the nonlinear shaping mechanism for gravity wave spectrum in the atmosphere. *Ann. Geophys.*, 27:1–20.
- Dalaudier, F., Sidi, C., Crochet, M., et al. (1994). Direct evidence of “sheets” in the atmospheric temperature field. *J. Atmos. Sci.*, 51(2):237–248.
- Dewan, E. M. (1979). Stratospheric wave spectra resembling turbulence. *Science*, 204:832–835.
- Dewan, E. M. (1997). Saturated-cascade similitude theory of gravity wave spectra. *J. Geophys. Res.*, 102:29799–29817.
- Dewan, E. M. and Good, R. E. (1986). Saturation and the “universal” spectrum for vertical profiles of horizontal scalar winds in the atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 91:2742–2748.
- Dikii, L. A. (1969). *Teoriya kolebanii zemnoi atmosfery [The Theory of Oscillations of the Earth's Atmosphere]*. Leningrad: Gidrometeoizdat. English transl. available as JPRS 50818, 1970.

Литература II

- Fritts, D. C. and Alexander, M. J. (2003). Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Rev. Geophys.*, 41:1003.
- Fritts, D. C., Tsuda, T., Kato, S., Sato, T., and Fukao, S. (1988). Observational evidence of a saturated gravity wave spectrum in the troposphere and lower stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, 45:1741–1759.
- Gossard, E. E. and Hooke, W. H. (1975). *Waves in the atmosphere*. Elsevier Sci. Publ. Co., Amsterdam.
- Gurvich, A. S. and Chunchuzov, I. P. (2008). Three-dimensional spectrum of temperature fluctuations in stably stratified atmosphere. *Ann. Geophys.*, 26:2037–2042.
- Kato, T. (1975). The cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 58:181–205.
- Kshevetskii, S., Kurdyeva, Y., Kulichkov, S., and et al. (2020). Simulation of propagation of acoustic-gravity waves generated by tropospheric front instabilities into the upper atmosphere. *Pure Appl. Geophys.*, 177:5567–5584.

Литература III

- Kulichkov, S. N., Chunchuzov, I. P., Bush, G. A., Mishenin, A. A., and Golikova, E. V. (2016). Spatio-temporal variability of the fine structure of the upper atmosphere according to infrasound sounding data. volume 52, pages 200–212.
- Kulichkov, S. N., Chunchuzov, I. P., and Popov, O. I. (2010a). Modeling the effects of the influence of a fine inhomogeneous structure of the atmosphere on the long-range propagation of pulsed acoustic signals. *Izv. RAS. Physics of the Atmosphere and Ocean*, 46(1):69–77.
- Kulichkov, S. N., Chunchuzov, I. P., and Popov, O. I. (2010b). Simulating the influence of an atmospheric fine inhomogeneous structure on long-range propagation of pulsed acoustic signals. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 46(1):60–68.
- Lax, P. (1954). Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 7:159–193.
- Lax, P. (1957). Hyperbolic systems of conservation laws. ii. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 10(4):537–566.

Литература IV

- Lyapunov, A. M. (1950). *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [The General Problem of the Stability of Motion]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat. English transl.: The General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, 1992.
- Majda, A. (1984). *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, volume 53 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag New York.
- Malkin, I. G. (1966). *Teoriya ustoichivosti* [Theory of Stability]. Moscow: Nauka. English transl.: Theory of Stability of Motion, AEC-tr-3352, 1958 (for earlier edition).
- Prigogine, I. (1967). *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. NY. : John Wiley.
- Prigogine, I. and Kondepudi, D. (2002). *Sovremennaya termodinamika. Ot teplovykh dvigatelei do dissipativnykh struktur* [Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures]. Moscow: Mir. Orig. ed.: Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures, John Wiley & Sons, 1998.

Литература V

- Richtmyer, R. D. (1982). *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki [Principles of advanced mathematical physics]*. Moscow: Mir. Orig. ed.: Principles of Advanced Mathematical Physics, Springer-Verlag, 1978.
- Röttger, J. (1981). The dynamics of stratospheric and mesospheric fine structure investigated with an MST VHF radar. In Avery, S. K., editor, *Middle Atmosphere Program Handbook*, volume 2, pages 341–350. University of Illinois, Illinois.
- Rozhdestvenskii, B. L. and Yanenko, N. N. (1978). *Sistemy kvazilineinykh uravnenii [Systems of quasilinear equations]*. Moscow: Nauka. English transl.: Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics, AMS, 1983.