

# Квантовые плотности как инструмент частотно-временного анализа и моделирования радиозатменных данных

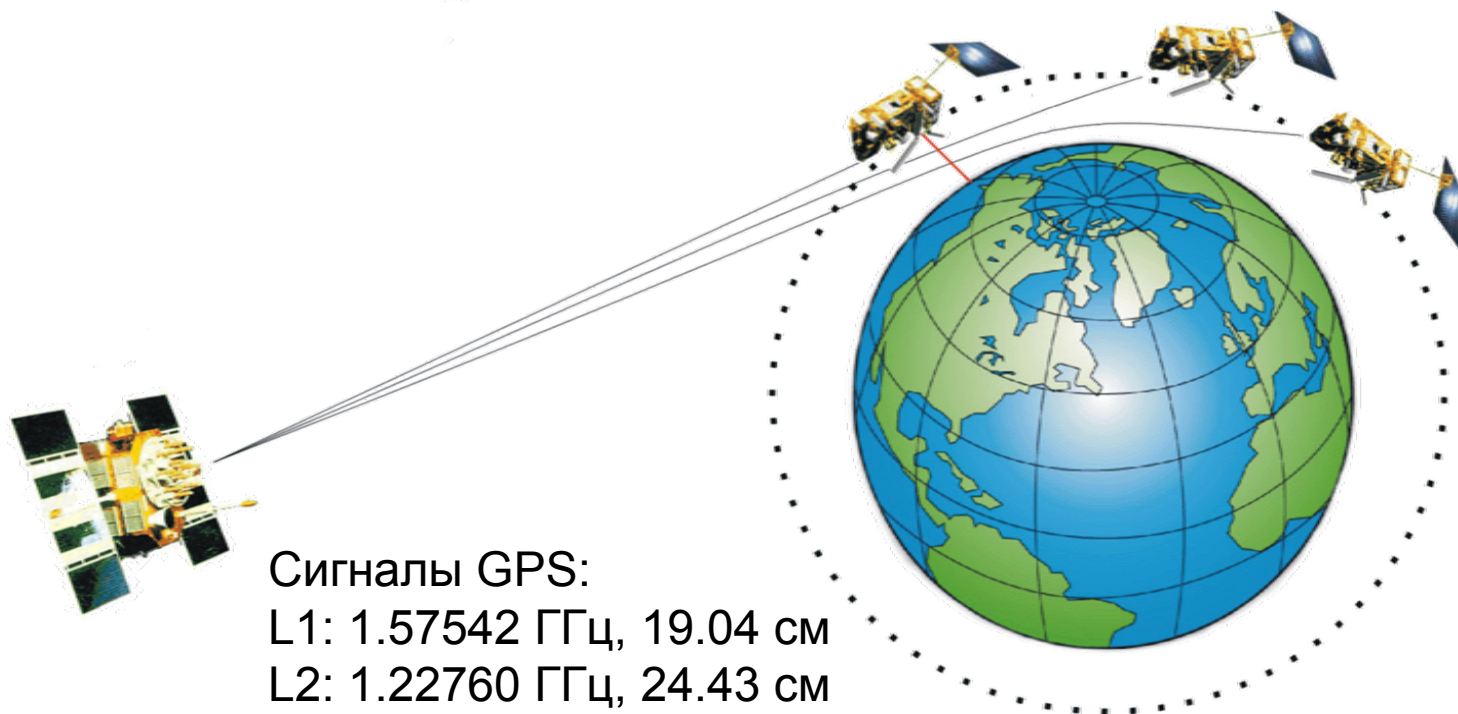


М.Е.Горбунов, О.А.Доловова  
Институт физики атмосферы  
им. А. М. Обухова РАН



# Содержание

- Радиозатменное зондирование атмосферы Земли
- Проблема интерпретации измеряемых волновых полей
- Линейные представления волновых полей и восстановление лучевого многообразия
- Подход к восстановлению общей структуры лучевого многообразия: определение 2-мерной плотности в фазовом пространстве
- Функции Вигнера и Кирквуда
- Дробное преобразование Фурье как вращение фазового пространства
- Усреднение функции Кирквуда по вращениям как процедура сглаживания функции Вигнера
- Приложение к радиозатменному зондированию



1. Измерение рефракции сигналов систем спутниковой навигации (GPS, ГЛОНАСС, Галилео) в атмосфере Земли на трассах космос-космос.
2. Восстановление вертикальных профилей температуры, давления и влажности.

**М.Е.Горбунов**

**ФИЗИЧЕСКИЕ  
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ПРИНЦИПЫ  
СПУТНИКОВОГО  
РАДИОЗАТМЕННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ  
АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ**







# Радиозатменные Эксперименты

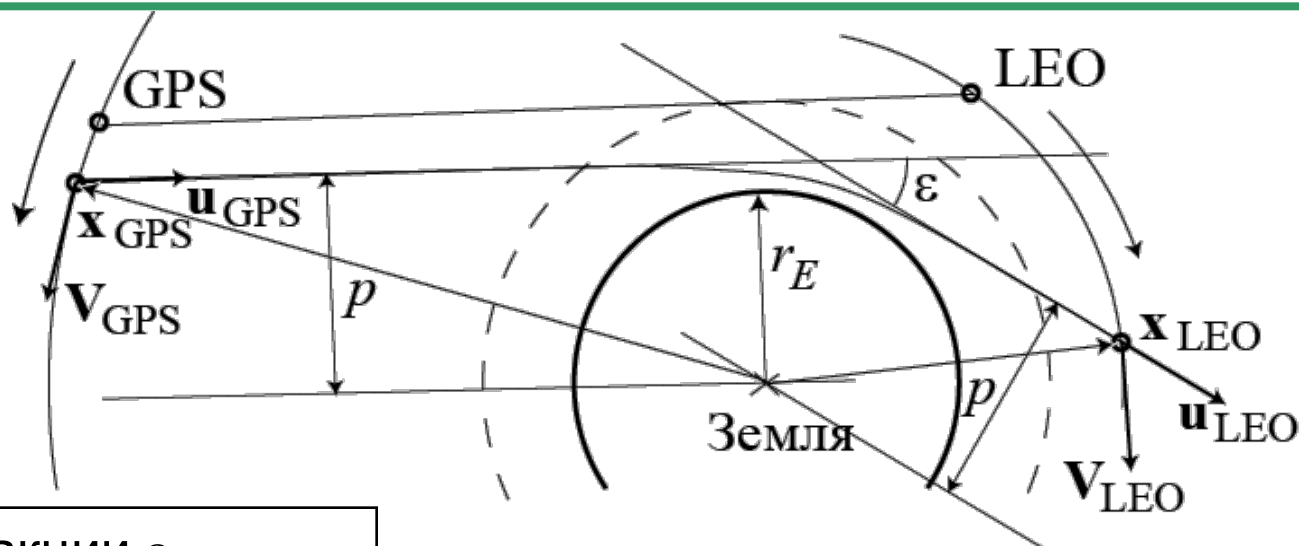
| Год       | Название                                                                                            | Сведения                                                                                                                                                                   |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1995-1997 | GPS/MET<br>(GPS Meteorology)                                                                        | Первый демонстрационный эксперимент. <b>UCAR</b> (Университетская корпорация по атмосферным исследованиям, Боулдер, США) в 1995 – 1997 гг. при помощи спутника Microlab-1. |
| 2000-2008 | <b>CHAMP</b><br>( <b>Challenging Minisatellite Payload</b> )                                        | GFZ (Центр геофизических исследований, Потсдам). Улучшенная антенна. 200 сеансов в день.                                                                                   |
| 2006-2019 | <b>COSMIC</b><br>( <b>Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, and Climate</b> ) | Тайвань, США. 6 низкоорбитальных спутников. Около 3000 глобально распределенных зондирований в день. В приемнике впервые реализована схема открытой петли.                 |



# Радиозатменные Эксперименты

| Год          | Название                                                         | Сведения                                                                                                                                                                                           |
|--------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2006-<br>... | <b>GRAS</b><br>( <b>GNSS Receiver for Atmospheric Sounding</b> ) | <b>MetOp (Meteorological Operational satellite)</b><br>Европейское космическое агентство. Впервые применена частоты выборки 1 кГц, что позволило демодулировать данные без                         |
| 2019-<br>... | COSMIC-2A                                                        | Продолжение программы COSMIC. Конфигурация из 6 спутников. Запущен в 2019 году, только в тропической конфигурации. Улучшенные антенна и приемник. Поддержка разных ГНСС. До 10 000 сеансов в день. |
| 2020-<br>... | Spire<br>(коммерческий)                                          | Первый эксперимент с использованием малых спутников NanoSat.                                                                                                                                       |
| 2023         | PlanetIQ<br>(коммерческий)                                       |                                                                                                                                                                                                    |
| 2025         | Хорс-5                                                           | МГТУ им. Баумана. Запуск первого российского спутника для радиозатменных наблюдений.                                                                                                               |

# Радиозатменное зондирование



Угол рефракции  $\varepsilon$   
Прицельный параметр  $p$

Линейное  
преобразование  
 $\varepsilon(p) \longleftrightarrow \ln n(x)$

Показатель преломления  $n$   
Расстояние от центра Земли  $r$   
Рефракционный радиус  $x$

$$\varepsilon(p) = -2p \int_{r_0}^{\infty} \frac{d \ln n(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{n(r)^2 r^2 - p^2}}$$

$$n(x) = \exp \left( \frac{1}{\pi} \int_p^{\infty} \frac{\varepsilon(p) dp}{\sqrt{p^2 - x^2}} \right)$$

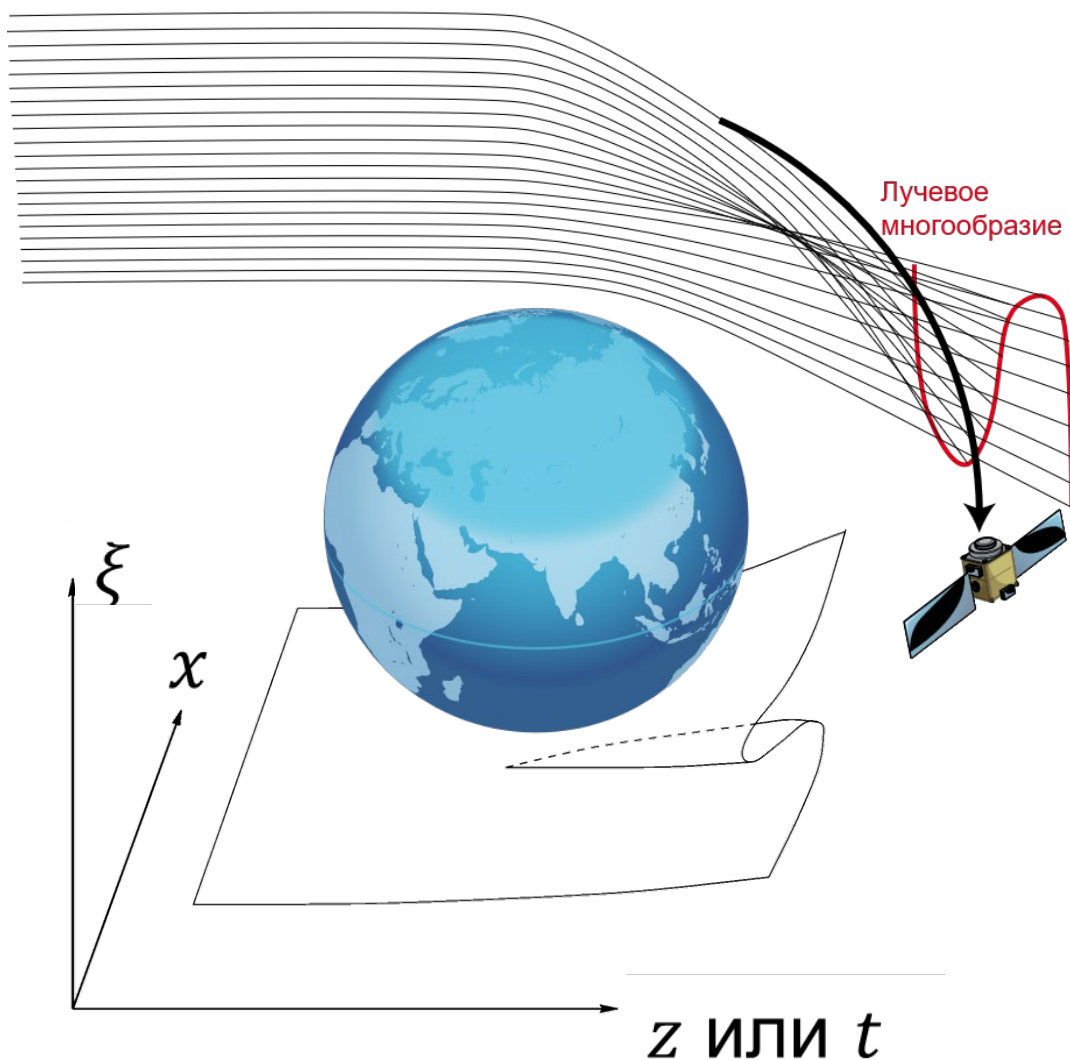
$$x = n(r)r; \quad r(x) = \frac{x}{n(x)}$$





# Многолучевое распространение

Лучи от спутника  
системы навигации



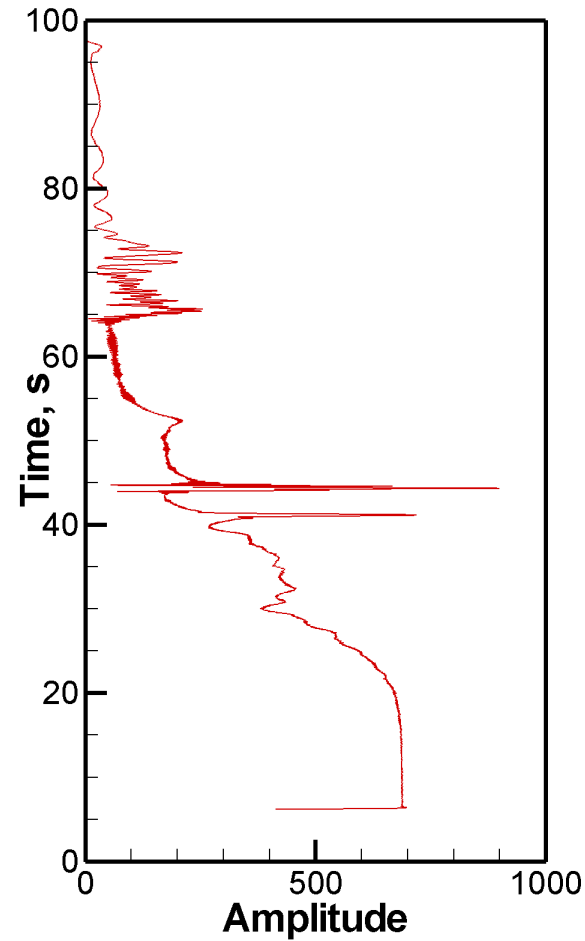
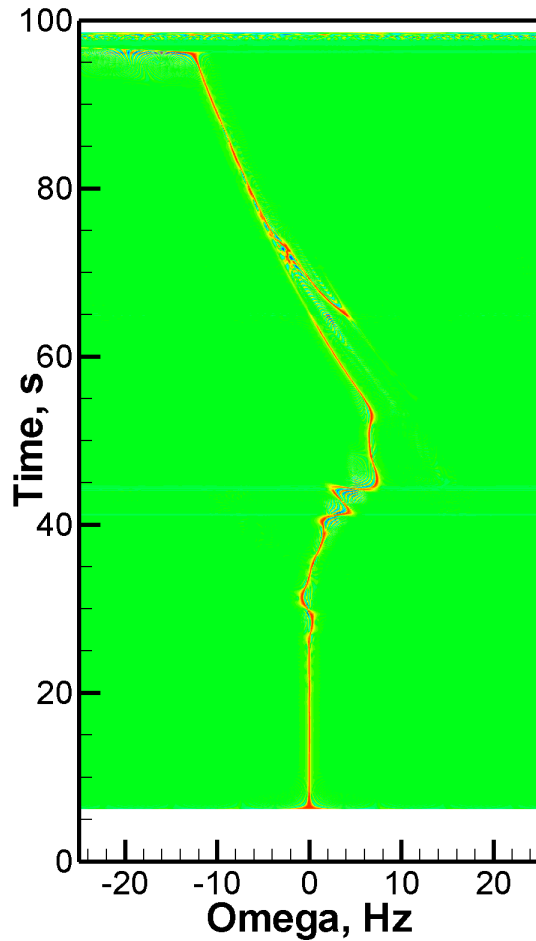
Для решения задачи восстановления лучевой структуры поля в многолучевых зонах на основе подходов, развитых в работах В.А.Фока, В.П.Маслова, Ю.В.Егорова и Л. Хермандера был разработан метод канонических преобразований.



# Метод канонических преобразований

1. **Фок В.А.** Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
2. **Маслов В.П.** Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. – 408 с.
3. **Егоров Ю.В.** Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 168 с.
4. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986–1988.
5. **Горбунов М.Е.** Физические и математические принципы спутникового радиозатменного зондирования атмосферы Земли. – Москва: ГЕОС, 2019. – 300 с. – ISBN 978-5-89118-780-1.

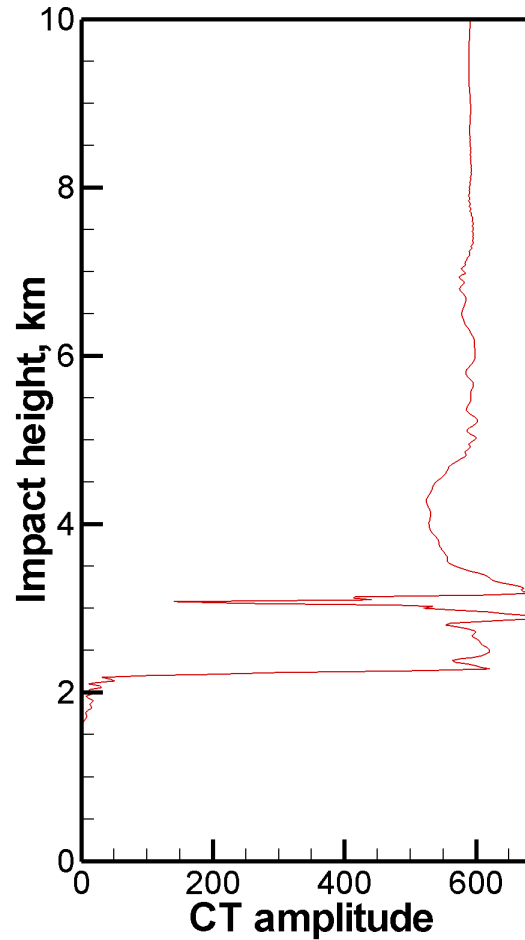
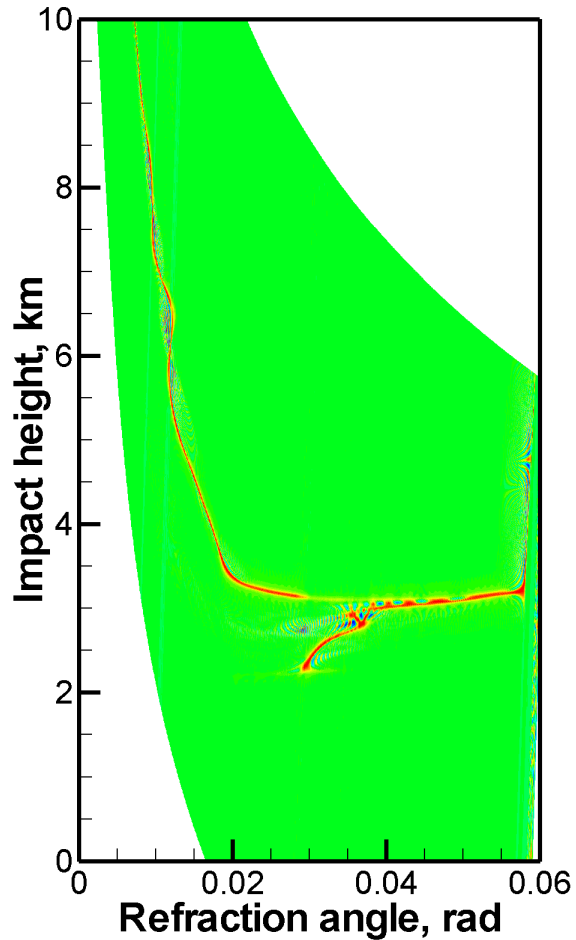
# Проекции лучевого многообразия



$$A^2(t) = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Плотность энергии по времени (мощность)

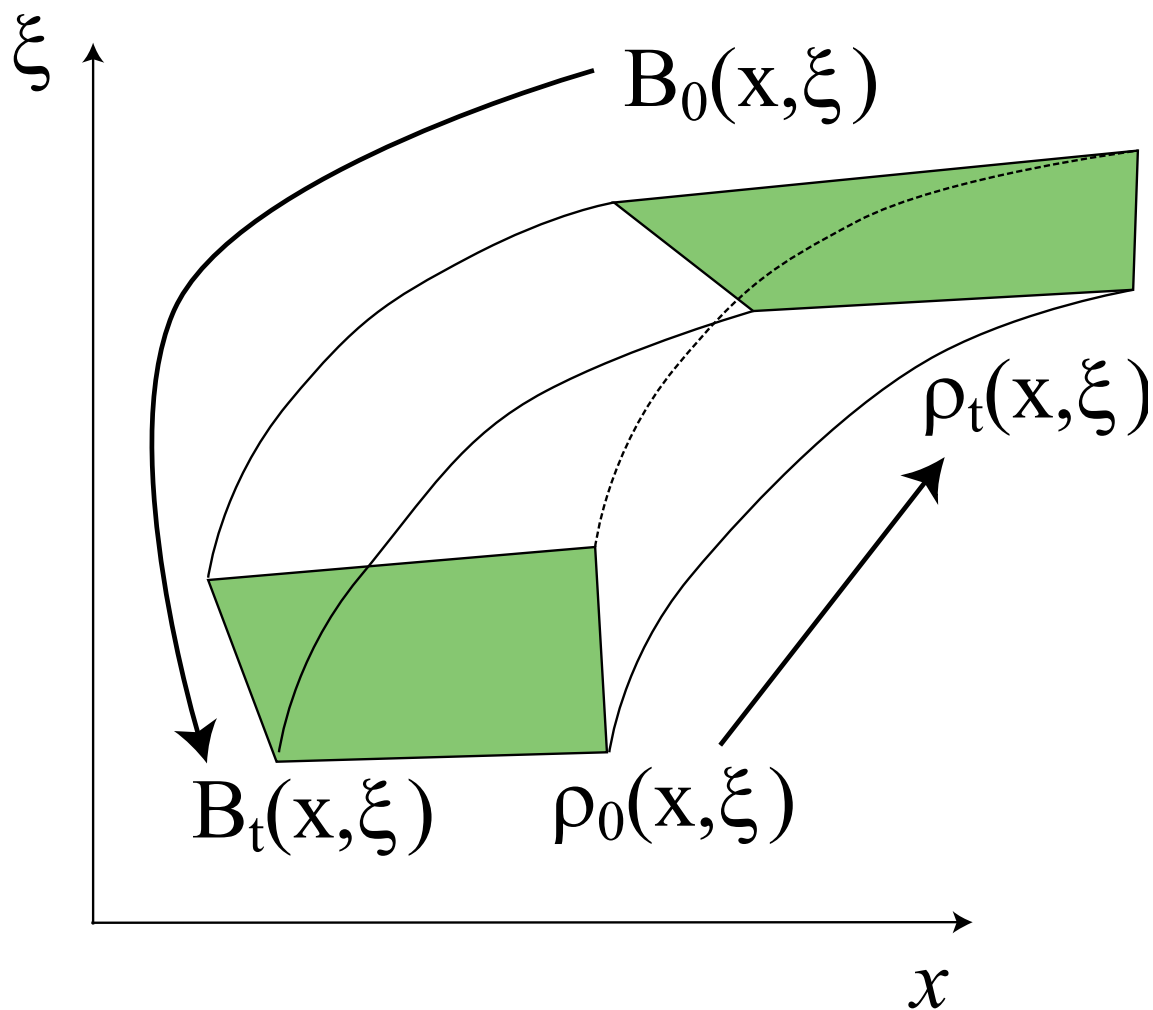
# Проекции лучевого многообразия



$$A'^2(p) = \frac{\Delta E}{\Delta p}$$

Плотность энергии по прицельной высоте луча

# Плотности и наблюдаемые





# Ссылки

1. **P.A.M. Dirac**, Note on exchange phenomena in the Thomas atom, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 26, 376–395 (1930).
2. **H. Weyl**, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1931).
3. **W. Heisenberg**, Über die inkohärente Streuung von Röntgenstrahlen, *Physik. Zeitschr.* 32, 737–740 (1931).
4. **E.P. Wigner**, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* 40, June 1932, 749–759.
5. **J.G. Kirkwood**, Quantum statistics of almost classical assemblies, *Phys. Rev.* 44, July 1933, 31–37.
6. **J. Ville**, Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique, *Cables et Transmission*, 2A: (1948) 61–74.
7. **J.E. Moyal**, Quantum Mechanics as a Statistical Theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1949, 45, 99–124.



# Статистическое определение

Псевдо-характеристическая функция распределения в фазовом пространстве приводит к функции Вигнера:

$$\hat{\xi} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{x} = x$$
$$\phi^W(\tilde{\xi}, \tilde{x}) = E(\exp(i\tilde{\xi}x + i\tilde{x}\xi)) = \langle \psi | \exp(i\tilde{\xi}\hat{x} + i\tilde{x}\hat{\xi}) | \psi \rangle =$$
$$= \text{Tr}(\exp(i\tilde{\xi}\hat{x} + i\tilde{x}\hat{\xi}) \circ \hat{\rho})$$

Оператор плотности:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Вейлевский символ оператора плотности, или функция Вигнера:

$$\rho^W(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi^W(\tilde{\xi}, \tilde{x}) \exp(-i\tilde{\xi}x - i\tilde{x}\xi) d\tilde{x} d\tilde{\xi}$$

(Moyal, 1949).

Функция Кирквуда:

$$\phi^{x\xi}(\tilde{\xi}, \tilde{x}) = E(\exp(i\tilde{\xi}x + \tilde{x}\xi)) = \langle \psi | \exp(i\tilde{x}\hat{x}) \exp(i\tilde{\xi}\hat{\xi}) | \psi \rangle$$
$$\rho^{x\xi}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi^{x\xi}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \exp(-i\tilde{\xi}x - i\tilde{x}\xi) d\tilde{x} d\tilde{\xi}$$



# Плотность Вигнера

$$\rho_t^W(x, \xi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_t\left(x - \frac{\tilde{x}}{2}\right) \bar{\psi}_t\left(x + \frac{\tilde{x}}{2}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \tilde{x} \xi\right) d\tilde{x}$$

Вейлевский символ оператора плотности – квантовая плотность Вигнера. Она может пониматься и как квантовый, и как квази-классический объект. В последнем случае она выполняет процедуру деквантования, т.е. восстановления классического лучевого многообразия по волновой функции.

Среднее от квантовой наблюдаемой

$$\begin{aligned} \bar{B}_t &= \iint K_B(x', x'') \psi_t(x'') \bar{\psi}_t(x') dx' dx'' = \\ &= \iint \iint B\left(\frac{x' + x''}{2}, \xi'\right) \rho_t^W\left(\frac{x'' + x'}{2}, \xi''\right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (x'' - x')(\xi' - \xi'')\right] d\xi' d\xi'' dx' dx'' = \\ &= \iint B(x', \xi') \rho_t^W(x', \xi') d\xi' dx'. \end{aligned}$$

Плотность Вигнера действительна.

# Плотность Кирквуда

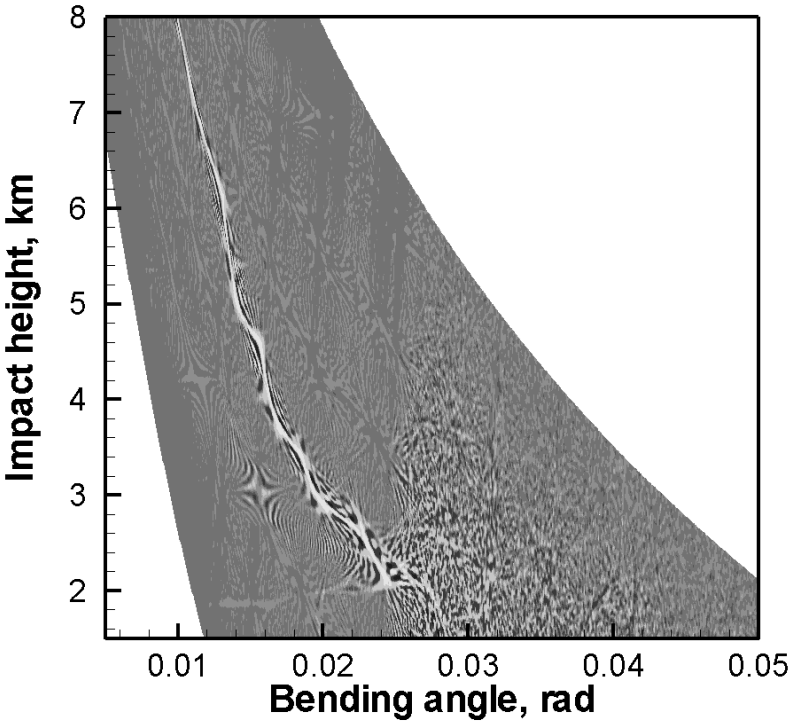
$$\begin{aligned}\rho_t^{x\xi}(x, \xi) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_t(x) \bar{\psi}_t(x + \tilde{x}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \tilde{x}\xi\right) d\tilde{x} = \\ &= \sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \psi_t(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} x\xi\right) \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \int \bar{\psi}_t(\tilde{x}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \tilde{x}\xi\right) d\tilde{x}\end{aligned}$$

Упорядоченный символ оператора плотности – квантовая плотность Кирквуда

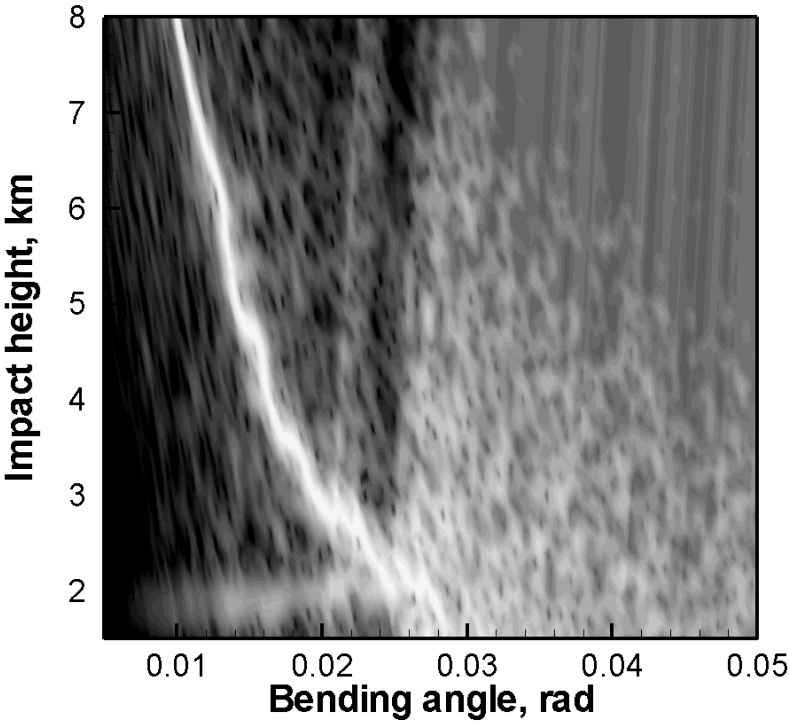
$$\begin{aligned}\bar{B}_t &= \iint K_B(x', x'') \psi_t(x'') \bar{\psi}_t(x') dx' dx'' \\ &= \iint \iint B(x', \xi') \rho_t^{x\xi}(x'', \xi'') \times \\ &\times \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (x'' - x')(\xi' - \xi'')\right] d\xi' d\xi'' dx' dx'' \approx \\ &\approx \iint B(x', \xi') \rho_t^{x\xi}(x', \xi') d\xi' dx'\end{aligned}$$



# Обработка экспериментальных данных



Плотность Вигнера

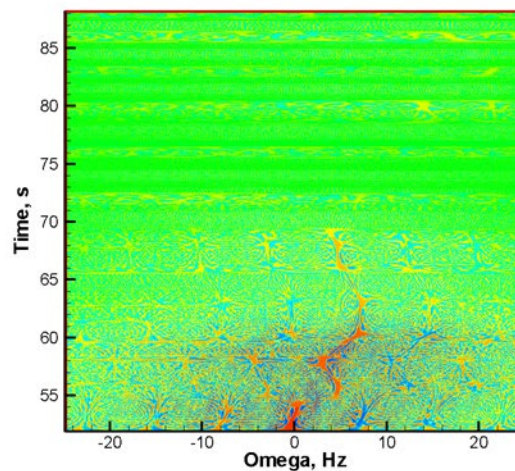
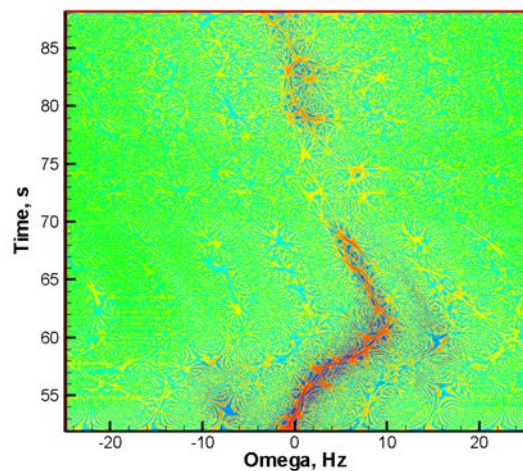
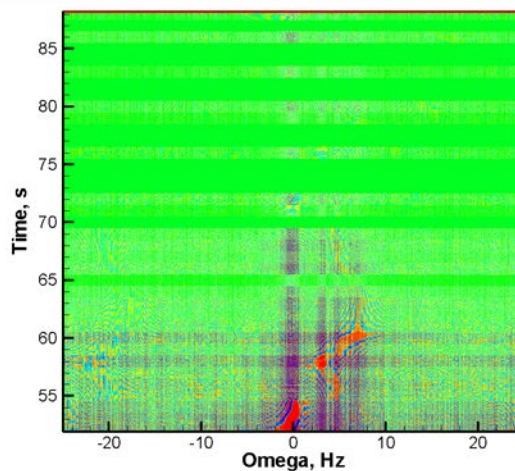
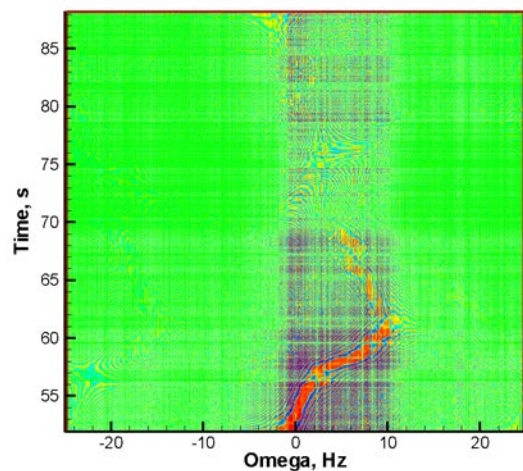


Спектрограмма



# Обработка экспериментальных данных: функции Вигнера и Кирквуда

2008/01/01; 02:54:13.000; 23.31S 103.39W; 15.524



KDF L1

KDF L2

WDF L1

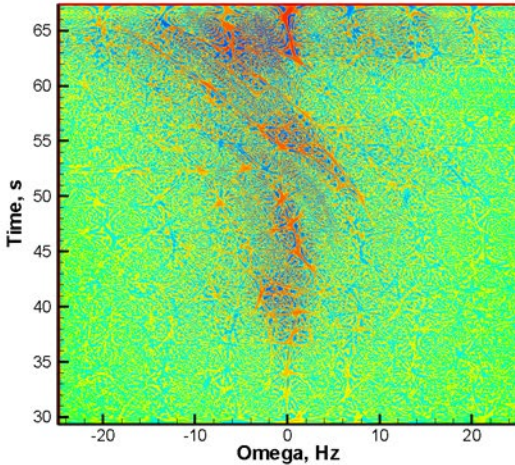
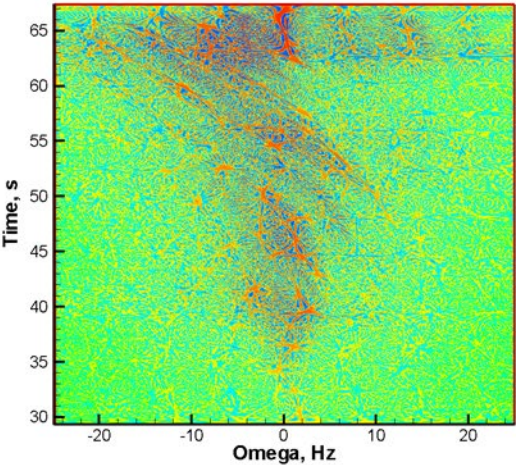
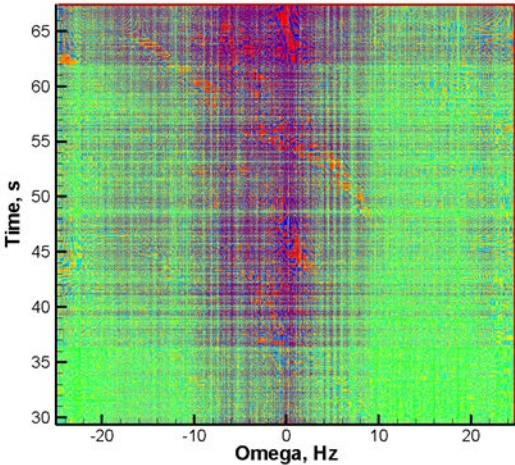
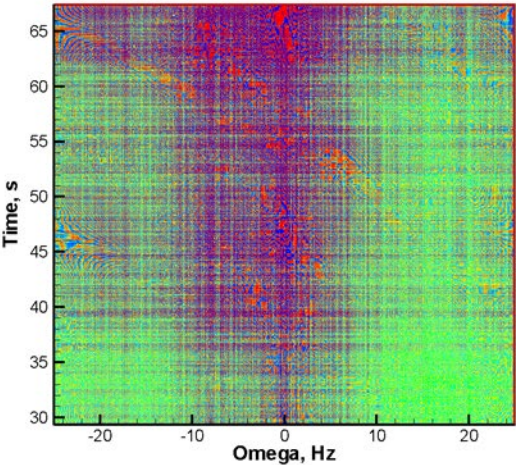
WDF L2





# Обработка экспериментальных данных: функции Вигнера и Кирквуда

2018/11/02; 00:05:04.039; 3.94N 157.74W; 29.923



| KDF L1 | KDF L2 |
|--------|--------|
| WDF L1 | WDF L2 |



# Вращение фазовой плоскости

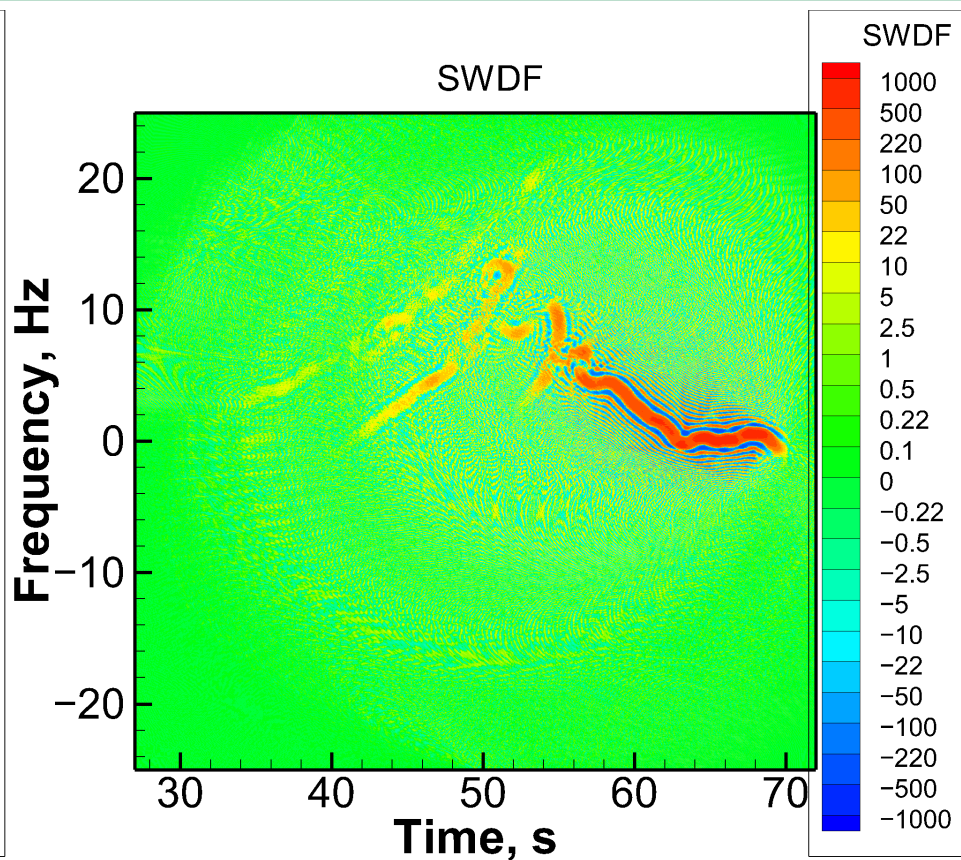
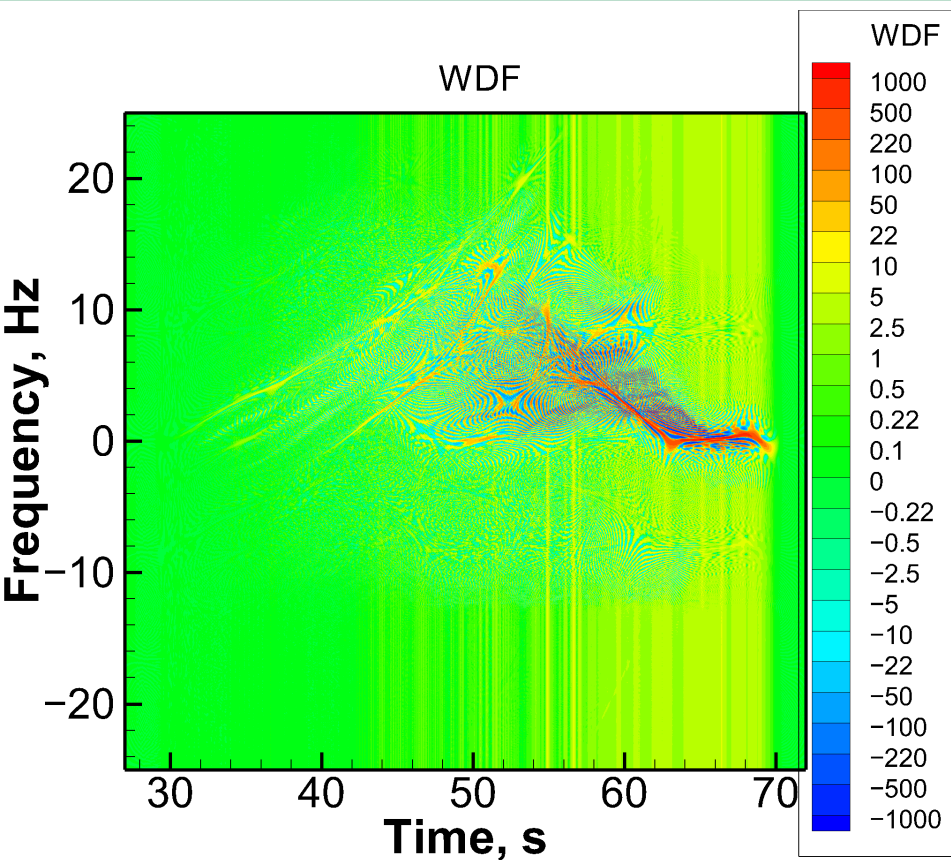
$$\rho^{x\xi}(\xi, x) = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right) = \rho^W(x, \xi) * T_W^{x\xi}(x, \xi)$$
$$T_W^{x\xi}(x, \xi) = \frac{1}{\pi \hbar} \exp\left(-\frac{2i}{\hbar} \xi x\right)$$

Функция Кирквуда, усредненная по группе вращений, равна  
сглаженной функции Вигнера

$$\rho^W(x, \xi) * \frac{1}{\pi} J_0(x^2 + \xi^2)$$



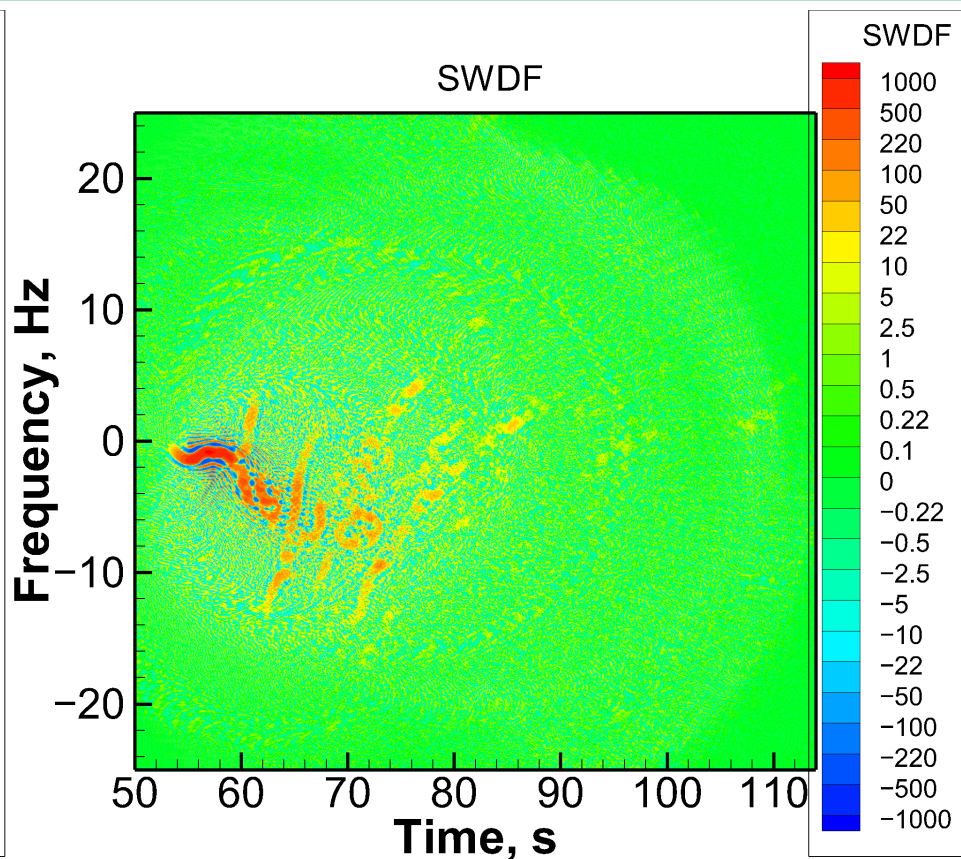
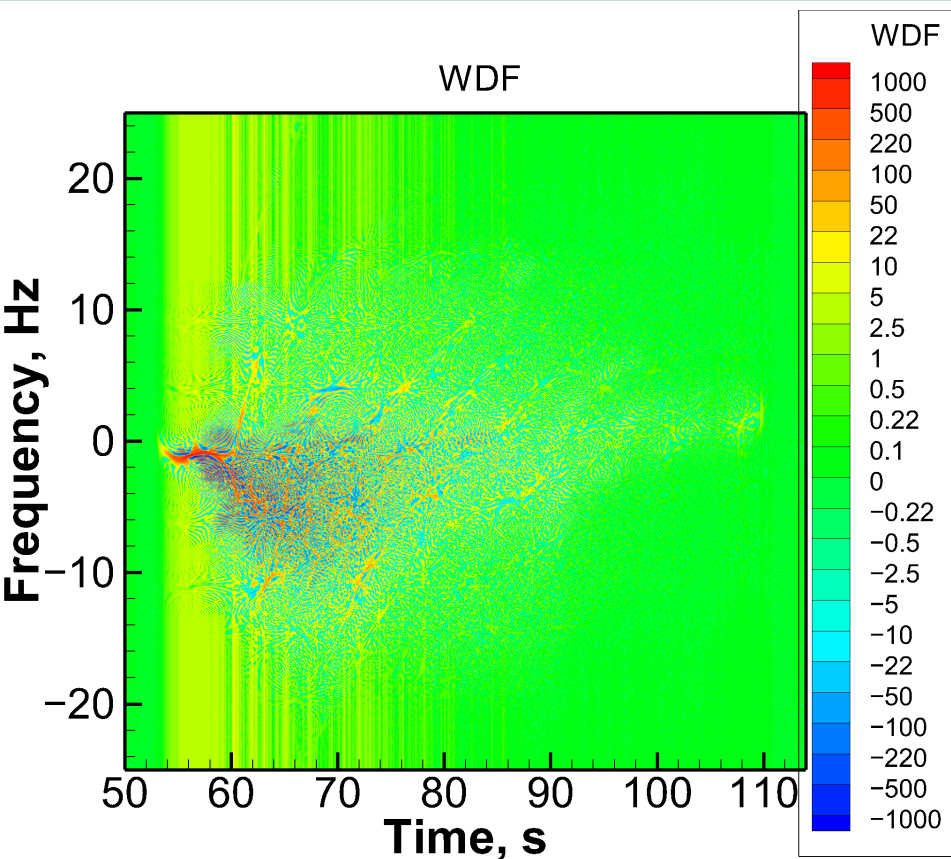
# Обработка экспериментальных данных







# Обработка экспериментальных данных







# Нормальная плотность

Операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{\xi}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{\xi})$$

Оператор смещения

$$\exp(i\tilde{x}\hat{\xi} + i\tilde{\xi}\hat{x}) = \exp\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{i\tilde{\xi}}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\right) = \exp(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{x} + i\tilde{\xi}), \quad z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{x} - i\tilde{\xi})$$

Нормальная плотность:

$$\phi^N(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = E(\exp(z\hat{a}^\dagger) \exp(-z^*\hat{a})) = \langle \psi | \exp(z\hat{a}^\dagger) \exp(-z^*\hat{a}) | \psi \rangle$$
$$\rho^N(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi^N(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \exp(-i\tilde{\xi}x - i\tilde{x}\xi) d\tilde{x} d\tilde{\xi}.$$

Нормальная плотность положительна.



# Антинормальная плотность

Операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p})$$

Оператор смещения

$$\exp(i\tilde{x}\hat{\xi} + i\tilde{\xi}\hat{x}) = \exp\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{i\tilde{\xi}}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\right) = \exp(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{x} + i\tilde{\xi}), \quad z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{x} - i\tilde{\xi})$$

Антинормальная плотность:

$$\phi^{AN}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = E(\exp(-z^*\hat{a}) \exp(z\hat{a}^\dagger)) = \langle \psi | \exp(-z^*\hat{a}) \exp(z\hat{a}^\dagger) | \psi \rangle$$
$$\rho^{AN}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi^{AN}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \exp(-i\tilde{\xi}x - i\tilde{x}\xi) d\tilde{x} d\tilde{\xi}$$



# Нормальная и антинормальная плотности

Явные выражения:

$$\rho_{\psi}^N(x, \xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \iint \psi\left(q - \frac{s}{2}\right) \psi^*\left(q + \frac{s}{2}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{4} - (x - q)^2 + i\xi s\right) dq ds.$$

$$\rho_{\psi}^{AN}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi\sqrt{\pi}} \iint \psi\left(q - \frac{s}{2}\right) \psi^*\left(q + \frac{s}{2}\right) \exp\left(\frac{s^2}{4} + (x - q)^2 + i\xi s\right) dq ds.$$

Средние:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho} \circ \hat{B}) &= \int \frac{dz^* \wedge dz}{2\pi i} \rho^{AN}(z^*, z) B^N(z^*, z) = \\ &= \int \frac{dz^* \wedge dz}{2\pi i} \rho^N(z^*, z) B^{AN}(z^*, z). \end{aligned}$$

Аналогичное точное равенство:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho} \circ \hat{B}) &= \int \frac{dx \wedge d\xi}{2\pi} \rho^{x\xi}(x, \xi) B^{\xi x}(x, \xi) = \\ &= \int \frac{dx \wedge d\xi}{2\pi} \rho^{\xi x}(x, \xi) B^{x\xi}(x, \xi) \end{aligned}$$



# Соотношения между плотностями

Плотности Вигнера и Кирквуда:

$$A^W(x, \xi) = \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right) A^{\xi x}(x, \xi), \quad A^{\xi x}(x, \xi) = \exp\left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right) A^W(x, \xi),$$

$$A^{x\xi}(x, \xi) = \exp\left(-i \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right) A^{\xi x}(x, p), \quad A^{\xi x}(x, \xi) = \exp\left(i \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right) A^{x\xi}(x, \xi).$$

Плотность Вигнера и нормальная плотности:

$$A^W(x, \xi) = \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right) A^N(x, \xi),$$

$$A^N(x, \xi) = \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right) A^W(x, \xi).$$

Плотность Вигнера и антинормальная плотности:

$$A^W(x, \xi) = \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right) A^{AN}(x, \xi),$$

$$A^{AN}(x, \xi) = \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right) A^W(x, \xi).$$



# Соотношения между плотностями

Операторное среднее геометрическое:

$$A^{ZY}(Y, Z) \xleftrightarrow[\exp\left(\frac{1}{2}[\hat{Z}, \hat{Y}] \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z}\right)]{\exp\left(\frac{1}{2}[\hat{Y}, \hat{Z}] \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z}\right)} A^W(Y, Z) \xleftrightarrow[\exp\left(\frac{1}{2}[\hat{Z}, \hat{Y}] \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z}\right)]{\exp\left(\frac{1}{2}[\hat{Y}, \hat{Z}] \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z}\right)} A^{YZ}(Y, Z).$$

Плотность Вигнера находится в середине между  $A^{xp}$  и  $A^{px}$ ,  
или между  $A^N$  и  $A^{AN}$ . Поэтому:

$$\text{Tr}(\hat{\rho} \circ \hat{B}) = \int \frac{dx \wedge d\xi}{2\pi} \rho^W(x, \xi) B^W(x, \xi)$$



# Динамические уравнения

Квантовые динамические уравнения Шредингера,

$$\hat{E}\psi_t \equiv -\frac{1}{i}\frac{d\psi_t}{dt} = \hat{H}\psi_t.$$

Уравнение Шредингера – параболическое уравнение.

Операторные уравнения Неймана и Гейзенберга:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{\psi_t} = i[\hat{\rho}_{\psi_t}, \hat{H}].$$

$$\frac{d}{dt}\hat{B}_t = -i[\hat{B}_t, \hat{H}].$$

Как решать операторные уравнения?





# Динамические уравнения

Уравнения Мойла для символов:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_{\psi_t}^W}{\partial t} &= -\{\rho_{\psi_t}^W, H^W\}_{\hbar}^W \simeq -\{\rho_{\psi_t}^W, H^W\}, \\ \frac{\partial B_t^W}{\partial t} &= \{B_t^W, H^W\}_{\hbar}^W \simeq \{B_t^W, H^W\}.\end{aligned}$$

Скобка Мойла:

$$\{A^W, B^W\}_{\hbar}^W = \frac{2}{\hbar} \sin \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) A^W \otimes B^W.$$

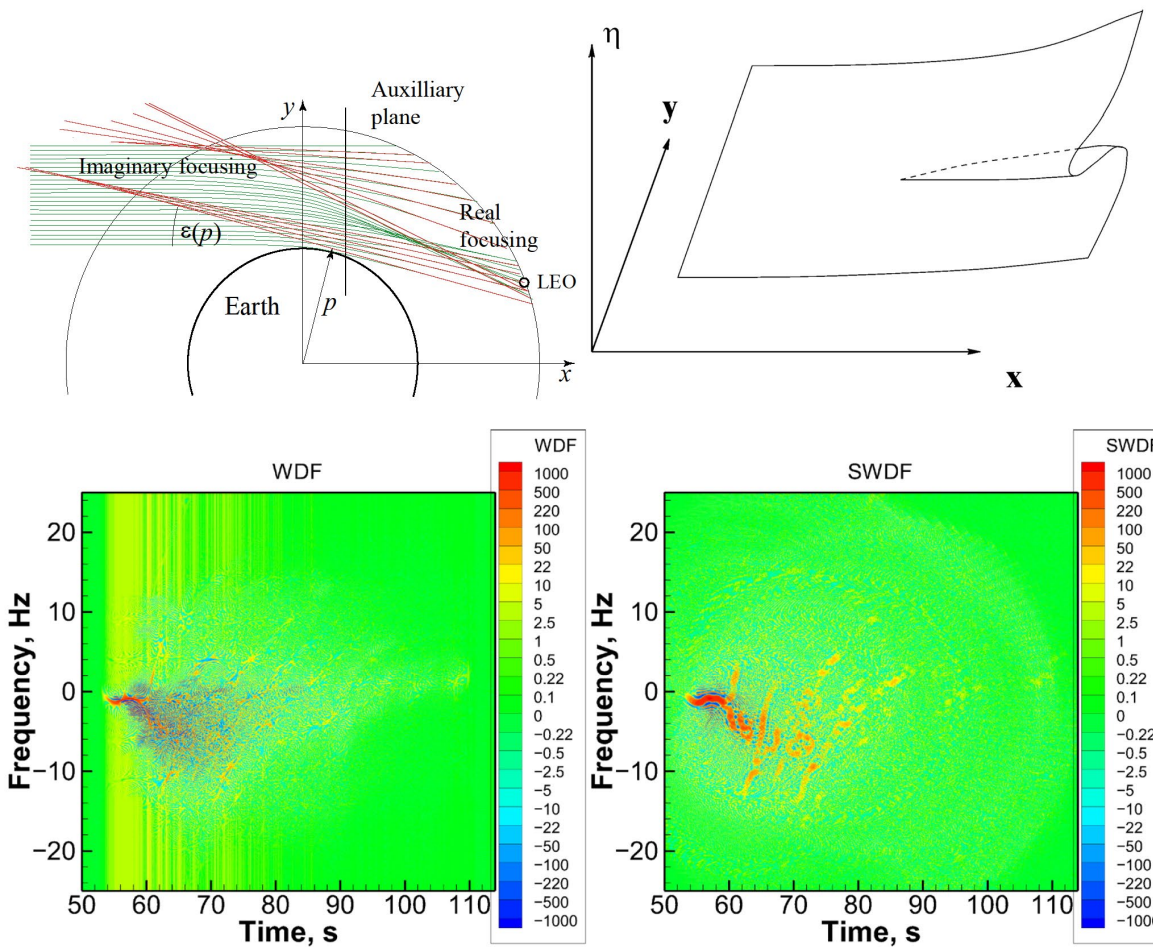
В главном порядке скобка Пуассона.

Уравнение Мойла является точным, но записано для плотности в фазовом пространстве.

# Заключение

---

1. Квантовые плотности описывают псевдораспределение энергии в лучевом пространстве.
2. Существуют различные виды плотностей, связанные с различным упорядочением некоммутирующих операторов координаты и импульса.
3. Описания волновых полей с использованием квантовых плотностей являются полными и потому эквивалентными.
4. Квантовые плотности являются мощным аппаратом анализа лучевых многообразий.
5. Динамика волновых полей может быть описана как динамика квантовых плотностей.



1. **Горбунов М.Е., Коваль О.А.** Квантовые плотности Кирквуда и Вигнера, их свойства и приложения в радиофизике // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2021. Т. 64, № 2. С. 153–162. DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_02\_153M.
2. **M.Gorbunov and O.Dolovova**, Fractional Fourier Transform and distributions in the ray space: application for the analysis of radio occultation data // *Remote Sensing*. 2022. V. 14. No. 22. Art. 5802, doi: 10.3390/rs14225802.
3. **Горбунов М.Е.** Вторичное квантование, случайные процессы и квантовые плотности для пешеходов. Монография. Готовится к публикации.

# Спасибо за внимание!

